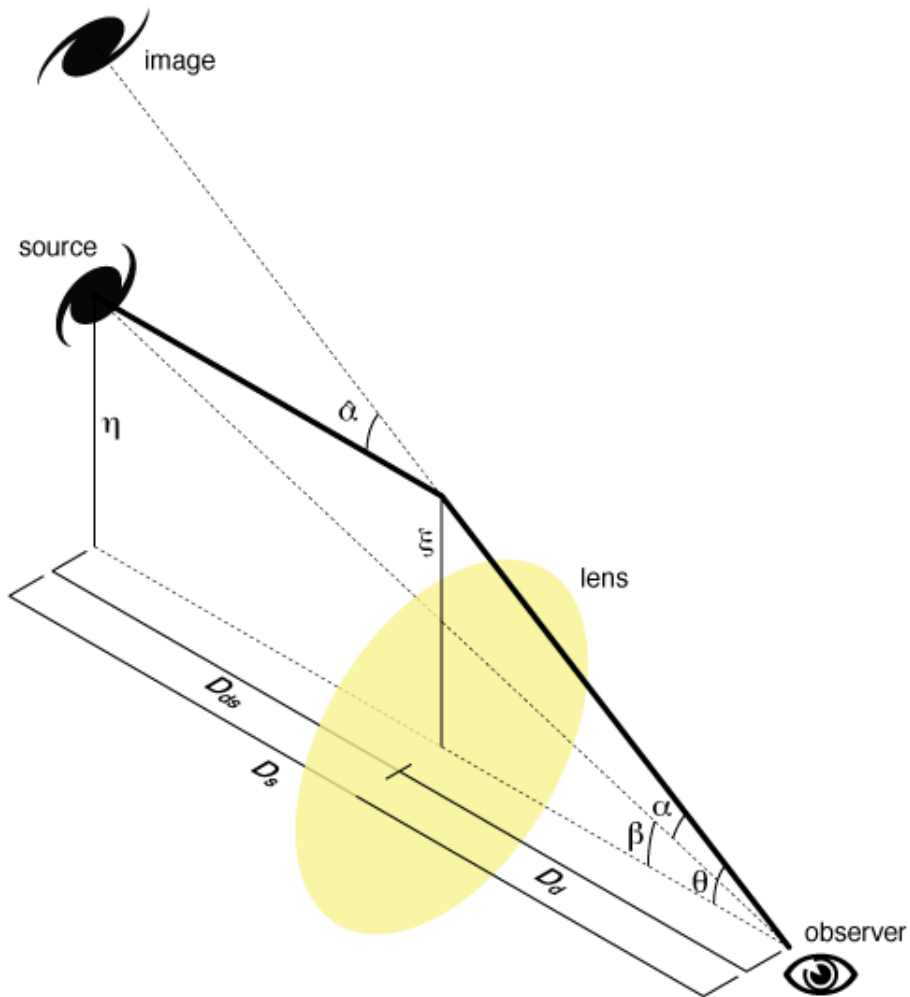


# همگرایی گرانشی Gravitational Lensing

حسین مصحفی  
بهار ۱۳۹۵  
www.icosmo.ir



www.icosmo.ir

## ۱.۰ مقدمه

گرانش بر روی نور اثر می‌گذارد، و مسیر فوتون‌ها را خمیده می‌کند. اگر به دو کهکشان که در آسمان همسایه هستند نگاه کنیم، نور کهکشان دورتر هنگام عبور از کنار کهکشان نزدیک‌تر تغییر مسیر می‌دهد. تصویر کهکشان‌ها بر اثر برهمکنش نور با گرانش می‌تواند دچار بزرگ‌نمایی و اعوجاج شود. این اثر به همگرایی گرانشی مشهور است. همگرایی گرانشی ابزاری قوی برای مطالعه ماده تاریک بین کهکشان‌ها فراهم می‌آورد، چرا که اثر وابسته به این نیست که خوشه کهکشانی به حالت تعادل رسیده یا همچنان در حال تغییر و رشد است. بحث را با حالت ساده که همگرایی ناشی از یک جرم نقطه‌ای است آغاز خواهیم نمود.

## ۲.۰ هندسه‌ی همگرایی گرانشی

همگرایی گرانشی زمانی رخ می‌دهد که نور که روی مستقیم‌ترین جهان خط ممکن (یک ژئودزی) حرکت می‌کند از میان یک فضا زمان خمیده حول جرم سنگین عبور کند. این پدیده شبیه به شکست نور هنگام عبور از یک عدسی شیشه‌ای است که وقتی نور از سطح عدسی عبور می‌کند که ضریب شکست مؤثر  $n$  دارد که  $n \equiv c/v$  نسبت سرعت نور در خلاء به سرعت آن در محیط عدسی  $v$  است. بیرون جسم کروی به جرم  $M$  (که به صورت جرم نقطه‌ای در نظر می‌گیریم) سرعت مختصه‌ای نور در راستای شعاعی با استفاده از متریک شوارتزشیلد به این شکل می‌تواند نوشته شود

$$\frac{dr}{dt} = c \left( 1 - \frac{2GM}{rc^2} \right) \quad (1)$$

بنابراین ضریب شکست را نیز می‌توان تعریف کرد

$$n = \frac{c}{dr/dt} = \left( 1 - \frac{2GM}{rc^2} \right)^{-1} \simeq 1 + \frac{2GM}{rc^2} \quad (2)$$

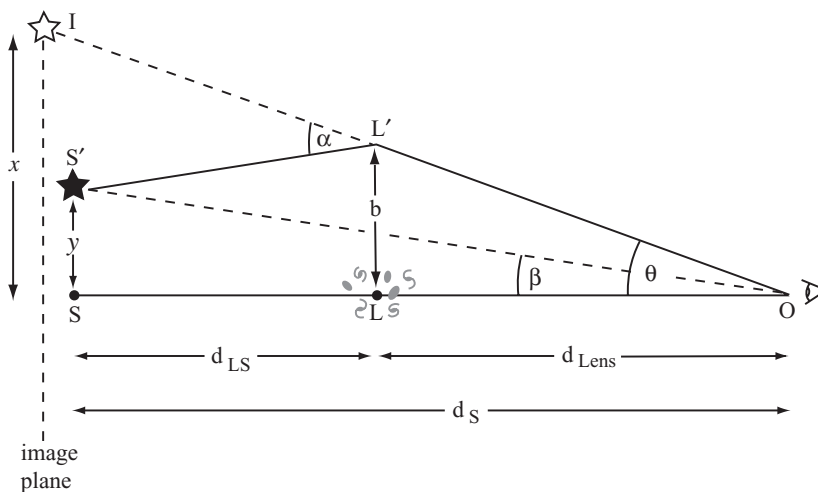
این رابطه با فرض  $2GM/rc^2 \ll 1$  برقرار است. در فاصله  $10^4 pc$  از یک کهکشان به جرم  $10^{11} M_{\odot}$ ، ضریب شکست مؤثر می‌شود  $n = 1 + 9/6 \times 10^{-7}$ .

## ۳.۰ ریزهمگرایی: خمش نور توسط یک جرم فشرده

خمش نور توسط خورشید یکی از اولین آزمون‌های نظریه نسبیت عام اینشتین بود. طی خورشید گرفتگی کامل سال ۱۹۱۹، یک تیم کاوش که توسط آرتور ادینگتون هدایت شد تصاویری از آسمان حول خورشید گرفته شده تهیه کردند. آن‌ها دریافتند که نور (مطابق شکل ۱) خم شده و ستاره‌های مجاور به مقدار بسیار کمی نسبت به مکان مرکز خورشید جابجا شده‌اند. اینشتین پیش‌بینی کرده بود که نور عبوری از فاصله‌ی  $b$  از کنار جرم  $M$  به اندازه‌ی زاویه‌ی  $\alpha$  دچار خمیدگی می‌شود

$$\alpha \approx \frac{4GM}{bc^2} = \frac{2R_s}{b} \quad (3)$$

که  $R_s = 2GM/c^2$  شعاع شوارتزشیلد است که برای خورشید حدود ۳ کیلومتر می‌باشد. با استفاده از این رابطه، می‌توانیم مکان تصویر یک چشمه دور دست را وقتی که یک جرم نقطه‌ای  $M$  در مقابل آن به عنوان عدسی گرانشی عمل می‌کند بدست آوریم. مطابق شکل ۱ اگر عدسی  $L$  وجود نداشته، ستاره‌ی  $S'$  را در زاویه‌ی  $\beta$  در آسمان نسبت به راستای  $L$  می‌دیدیم. اگر  $d_S \gg y$  باشد در نتیجه  $\beta \approx y/d_S$ . از آن‌جا که زاویه‌ی خمش



شکل ۱: همگرایی گرانشی ناشی از جرم نقطه‌ای

نور  $\alpha$  است، ستاره ظاهرا در زاویه  $\theta$  مشاهده خواهد شد و اگر  $d_S \gg x$  باشد  $\theta \approx x/d_S$  خواهد بود. اگر فاصله بین خط  $OL$  و  $I$  (مکان ظاهری ستاره در صفحه تصویر) باشد، وقتی خمش نور کوچک باشد،  $x - y = \alpha d_{LS}$  خواهد بود. در نهایت، تا زمانی که  $d_S \gg b$  باشد پارامتر برخورد  $b = \theta d_{Lens}$  است. با استفاده از رابطه‌ی ۳ برای  $\alpha$  با تقسیم کردن بر  $d_S$  بدست می‌آوریم

$$\theta - \beta = \frac{\alpha d_{LS}}{d_S} = \left(\frac{1}{\theta}\right) \frac{4GM}{c^2} \frac{d_{LS}}{d_{Lens} d_S} \equiv \frac{1}{\theta} \theta_E^2 \quad (4)$$

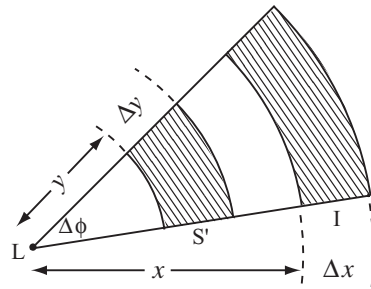
که  $\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{d_{LS}}{d_{Lens} d_S}}$  شعاع حلقه اینشتین نامیده می‌شود. اگر معادله درجه دوم بالا را حل کنیم جواب‌های زاویه‌ی بدست می‌آید

$$\theta^2 - \beta\theta - \theta_E^2 = 0 \rightarrow \theta_{\pm} = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}}{2} \quad (5)$$

ستاره‌ای که دقیقاً پشت عدسی باشد با  $\beta = 0$ ، به صورت یک دایره به شعاع  $\theta_E$  از نور در آسمان دیده خواهد شد. وقتی  $\beta > 0$  باشد، تصویر در  $\theta_+$  از عدسی دورتر خواهد بود، و  $\theta_+ > \beta$  و بیرون شعاع اینشتین خواهد افتاد:  $\theta_+ > \theta_E$ . تصویر در  $\theta_-$  معکوس این است، و درون شعاع اینشتین در سمت مخالف عدسی قرار می‌گیرد. بطور عادی، یک ستاره در قسمت مرکزی راه شیری توسط ستاره‌ای دیگر در دیسک همگرا می‌شود. تصاویر  $\theta_+$  و  $\theta_-$  بسیار نزدیک‌تر از آنند که از هم تمیز داده شوند. اما می‌توان گفت که یک ستاره همگرا شده است به این دلیل که درخشان‌تر به نظر می‌رسد. به دلیل ابعاد کوچک حلقه اینشتین همگرایی گرانشی توسط اجرام فشرده در هاله یک کهکشان ریز همگرایی گرانشی نامیده می‌شود.

اگر عدسی جرم نقطه‌ای در جلوی یک قسمت گسترده کوچک از درخشندگی باشد، تصویر آن دو قسمت حول  $\theta_{\pm}$  خواهد بود. همگرایی گرانشی درخشندگی سطحی  $I(x)$  را تغییر نمی‌دهد، بنابراین درخشندگی ظاهری هر یک از دو تصویر یک چشمه متناسب با مساحت‌شان است. ناحیه‌ی  $S'$  بخشی از یک حلقه به مرکزیت  $L$  بین شعاع  $y$  و  $y + \Delta y$  است (شکل ۲). تصویر  $I$  از زاویه‌ی یکسان  $\Delta\phi$  را در بر می‌گیرد، اما فواصل از مرکز منبسط یا منقبض شده است:  $x/y = \theta/\beta$  در حالی که  $\Delta x/\Delta y = d\theta/d\beta$ . نسبت مساحت‌ها می‌شود

$$\frac{A_{\pm}(\text{تصویر})}{A(\text{چشمه})} = \left| \frac{\theta}{\beta} \right| = \frac{1}{4} \left( \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}} + \frac{\sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}}{\beta} \pm 2 \right) \quad (6)$$



شکل ۲: روشنایی تصویر همگرا شده

بنابراین تصویر  $\theta_+$  که دورتر از  $L$  است همواره درخشان‌تر از چشمه است؛ همچنین در راستای مماسی کشیده شده است. تصویر نزدیک‌تر  $\theta_-$  کم‌نورتر است مگر اینکه  $\theta_E/\sqrt{2} < (3 - 2\sqrt{2})\theta_E^2$  یا  $\beta^2 < 0.348\theta_E$ . این نتایج وقتی که عدسی یک جسم گسترده نظیر کهکشان یا خوشه کهکشانی است نیز برقرار است: حداقل یکی از تصاویر درخشان‌تر از چشمه خواهد بود.

معادله‌ی ۴ دو جواب دارد که با استفاده از آن‌ها می‌توان جرم و زاویه‌ی  $\beta$  را تعیین کرد:

$$\beta = \theta_1 + \theta_2 \quad (7)$$

$$M = -\frac{\theta_1 \theta_2 c^2}{4G} \left( \frac{d_S d_{\text{Lens}}}{d_S - d_{\text{Lens}}} \right) \quad (8)$$

دقت نمایید که  $\theta_1$  و  $\theta_2$  علامت‌های مخالف هم دارند و دو تصویر در جهت‌های مخالف در عدسی تشکیل می‌شوند و جرم  $M$  مثبت خواهد شد.

### ۱.۳.۰ بزرگ‌نمایی (تقویت) تصویر

معادله‌ی ۴ را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت

$$\beta = \theta - \theta_E^2 \frac{\theta}{|\theta|^2} \quad (9)$$

با تعریف پارامترهای زیر

$$y := \frac{\beta}{\theta_E}; x := \frac{\theta}{\theta_E}$$

معادله همگرایی به شکل زیر ساده می‌شود

$$y = x - \frac{x}{|x|^2} \quad (10)$$

اگر  $S_0$  شار چشمه لنز نشده و  $S$  شار تصویر چشمه باشد، بزرگ‌نمایی تصویر تعریف می‌شود

$$\mu := \frac{S}{S_0} = \frac{\omega}{\omega_s} \quad (11)$$

که  $\omega$  زاویه‌ی فضایی تصویر و  $\omega_s$  زاویه‌ی فضایی چشمه است. بزرگ‌نمایی جرم نقطه‌ای به این صورت داده می‌شود:

$$\mu_{\pm} = \frac{1}{4} \left( \frac{y}{\sqrt{y^2 + 4}} + \frac{\sqrt{y^2 + 4}}{y} \pm 2 \right) \quad (12)$$

برای مقادیر  $y \gg 1$  داریم  $\mu_+ \geq 1$  و  $\mu_- \sim 0$ : اگر چشمه و عدسی کاملاً هم راستا نباشند، تصویر دوم به شدت تضعیف می‌شود و تصویر اصلی بزرگ‌نمایی بسیار نزدیک به یک دارد. به ازای  $y \rightarrow 0$ ، بزرگ‌نمایی دو تصویر و اگر می‌شود  $\mu_{\pm} \rightarrow \infty$ . دلیل این پدیده کاملاً هندسی است: در این حالت، خارج از یک چشمه نقطه‌ای صفر-بعدی یک تصویر یک بعدی، حلقه اینشتین تشکیل می‌شود. این واگرایی فیزیکی نیست و بزرگ‌نمایی بی‌نهایت در واقعیت رخ نمی‌دهد. حتی برای  $y = 0$  نیز بزرگ‌نمایی مقدار محدود باقی می‌ماند به دو دلیل. اول این‌که چشمه‌های واقعی گستردگی محدودی دارند و بزرگ‌نمایی نیز محدود خواهد بود. دوم، حتی اگر یک چشمه کاملاً نقطه‌ای داشته باشیم، اثرات موجی نور (مثل تداخل) به مقدار محدودی برای  $\mu$  منجر خواهند شد. بزرگ‌نمایی مجموع یک چشمه نقطه‌ای با جمع دو بزرگ‌نمایی بدست می‌آید

$$\mu(y) = \mu_+ + \mu_- = \frac{y^2 + 2}{y\sqrt{y^2 + 4}} \quad (13)$$

### ۲.۳.۰. مقیاس زمانی مشخصه برای تغییر نور

فرض کنید  $v$  سرعت عرضی معمول برای عدسی باشد، بنابراین سرعت زاویه‌ای هست

$$\dot{\theta} = \frac{v}{d_L} = 4.22 \text{ mas yr}^{-1} \left( \frac{v}{200 \text{ km/s}} \right) \left( \frac{d_L}{10 \text{ kpc}} \right)^{-1} \quad (14)$$

اگر فرض کنیم چشمه و ناظر در حال سکون باشند. مقیاس زمانی مشخصه برای تغییر پذیری هست

$$t_E := \frac{\theta_E}{\dot{\theta}} = 0.214 \text{ yr} \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right)^{1/2} \left( \frac{d_L}{10 \text{ kpc}} \right)^{1/2} \times \left( 1 - \frac{d_L}{d_S} \right)^{1/2} \left( \frac{v}{200 \text{ km/s}} \right)^{-1} \quad (15)$$

این مقیاس زمانی برای عدسی‌هایی با جرم  $M \sim M_{\odot}$  و سرعت‌های کهکشانی از مرتبه ماه است. بنابراین اثر قابل اندازه‌گیری است. در حالت کلی، هم چشمه، هم عدسی و هم ناظر در حال حرکتند و سرعت  $v$  باید به صورت سرعت مؤثر در نظر گرفته شود.

### ۳.۳.۰. منحنی‌های نوری

در اغلب موارد، حرکت نسبی می‌تواند به صورت خطی در نظر گرفته شود، بطوری که مکان چشمه در صفحه چشمه به این صورت نوشته می‌شود

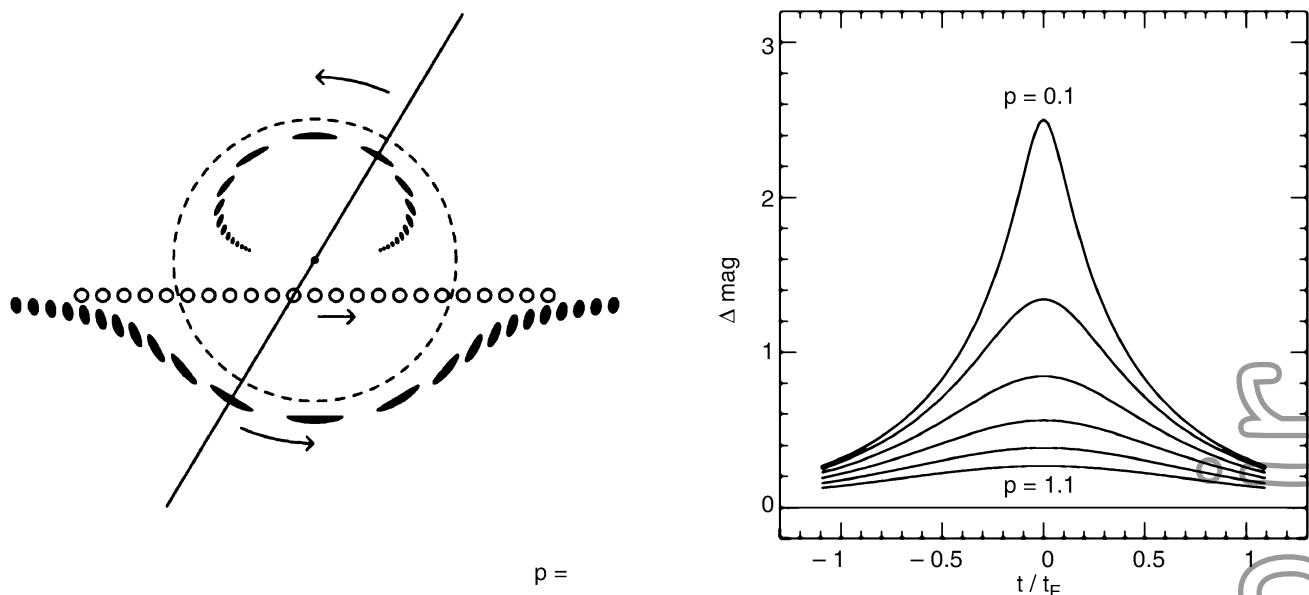
$$\beta = \beta_0 + \dot{\beta}(t - t_0)$$

با استفاده از  $y = \beta/\theta_E$  داریم

$$y(t) = \sqrt{p^2 + \left( \frac{t - t_{\max}}{t_E} \right)^2} \quad (16)$$

که  $p = y_{\min}$  فاصله کمینه از محور نوری و  $t_{\max}$  زمانی است که در  $y = p$  به این کمینه می‌رسد، بنابراین وقتی بزرگ‌نمایی رخ می‌دهد  $\mu = \mu(p) = \mu_{\max}$  بیشینه است. از این جا برای شار نیز بدست می‌آوریم

$$S(t) = S_0 \mu(y(t)) = S_0 \frac{y^2(t) + 2}{y(t)\sqrt{y^2(t) + 4}} \quad (17)$$



شکل ۳: چپ: نمایش ریز همگرایی کهکشانی برای عدسی متحرک. راست: منحنی نوری همگرایی گرانشی

### ۴.۳.۰ همگرایی گرانشی برای جسم گسترده

برای یک توزیع جرم پیوسته می‌توانیم تصور کنیم که عدسی به عنصر جرم‌هایی به اندازه  $dm = \Sigma(b)d^2b$  تقسیم شده که  $\Sigma(b)$  چگالی جرم سطحی عدسی در مکان  $b$  است، که با تصویر کردن چگالی جرم سه بعدی  $\rho$  در راستای خط دید عدسی بدست می‌آید. با استفاده از تعریف زاویه‌ی انحراف عدسی ۳ می‌توانیم به صورت انتگرالی باز نویسی نماییم

$$\hat{\alpha}(b) = \frac{4G}{c^2} \int d^2b' \Sigma(b') \frac{\mathbf{b} - \mathbf{b}'}{|\mathbf{b} - \mathbf{b}'|^2} \quad (18)$$

این زاویه‌ی انحراف را می‌توان در معادله همگرایی جایگذاری کرد

$$\beta = \theta - \frac{d_S - d_L}{d_S} \hat{\alpha}(D_L \theta) \quad (19)$$

که  $b = d_L \theta$  رابطه‌ی بین مکان پرتو نور در صفحه عدسی و جهت ظاهری  $\theta$  را بیان می‌کند. زاویه‌ی انحراف مقیاس شده را به این صورت تعریف می‌کنیم

$$\alpha(\theta) = \frac{d_{LS}}{d_S} \hat{\alpha}(d_L \theta) \quad (20)$$

بنابراین معادله ۱۹ به این صورت ساده می‌تواند نوشته شود

$$\beta = \theta - \alpha(\theta) \quad (21)$$

به صورت متداول زاویه انحراف مقیاس شده را به صورت زیر می‌نویسند

$$\alpha(\theta) = \frac{1}{\pi} \int d^2\theta' \kappa(\theta') \frac{\theta - \theta'}{|\theta - \theta'|^2} \quad (22)$$

که

$$\kappa(\theta) = \frac{\Sigma(d_L \theta)}{\Sigma_{cr}} \quad (23)$$

چگالی سطحی بدون بعد است و چگالی سطحی آستانه<sup>۱</sup> به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Sigma_{cr} = \frac{c^2 d_s}{4\pi G d_L d_{LS}} \quad (24)$$

که تنها وابسته به فاصله تا عدسی و فاصله تا چشمه است. اگرچه  $\Sigma_{cr}$  ترکیبی از فواصل کیهانی را شامل می‌شود اما از مرتبه بشری است

$$\Sigma_{cr} \approx 0.35 \left( \frac{d_L d_{LS}}{d_s \text{ Gpc}} \right)^{-1} \text{ gcm}^{-2} \quad (25)$$

مثال: کره‌ی هم‌دما

می‌دانیم که منحنی چرخش راه شیری در شعاع‌های بزرگ تخت است، و همینطور برای کهکشان‌های مارپیچی دیگر نیز اینگونه است. این نشان می‌دهد که جرم یک کهکشان متناسب با فاصله شعاعی  $r$  افزایش می‌یابد، بنابراین چگالی  $\rho(r) \propto r^{-2}$  یا بطور دقیق‌تر

$$\rho(r) = \frac{\sigma_v^2}{2\pi G r^2} \quad (26)$$

که در این جا  $\sigma_v$  سرعت پخشی یک بعدی ستاره‌ها در پتانسیل توزیع جرم است در صورتی‌که توزیع مدارهای ستاره‌ای همسانگرد باشد. در اصل،  $\sigma_v$  از روی پهنای خط طیفی قابل اندازه‌گیری است. توزیع جرم رابطه‌ی ۲۶ یک توزیع جرم همدمای تکین<sup>۲</sup> (SIS) نامیده می‌شود. چگالی ۲۶ در  $r \rightarrow 0$  واگرا می‌شود و نمی‌توان مدل را برای نقاط بسیار مرکزی کهکشان استفاده کرد.

مدل SIS یک مدل ساده مناسب برای عدسی‌های گرانشی در بازه وسیعی از شعاع است که به نظر می‌رسد می‌تواند ویژگی‌های اساسی سیستم‌های همگرایی گرانشی را باز تولید نماید. چگالی سطحی این مدل از تصویر کردن در راستای خط دید بدست می‌آید

$$\Sigma(b) = \frac{\sigma_v^2}{2Gb} \quad (27)$$

که جرم تصویر شده در شعاع  $b$  بدست می‌آید

$$M(b) = 2\pi \int_0^b db' b' \Sigma(b') = \frac{\pi \sigma_v^2 b}{G} \quad (28)$$

و زاویه‌ی انحراف به این شکل حاصل می‌شود

$$\hat{\alpha}(b) = 4\pi \left( \frac{\sigma_v}{c} \right)^2 \quad (29)$$

$$\alpha(\theta) = 4\pi \left( \frac{\sigma_v}{c} \right)^2 \left( \frac{d_{LS}}{d_s} \right) \equiv \theta_E \quad (30)$$

بنابراین زاویه‌ی انحراف برای یک مدل SIS ثابت و برابر  $\theta_E$  است و با مربع  $\sigma_v$  رابطه دارد. مقیاس زاویه‌ی اینشتین هست

$$\theta_E = 1''/15 \left( \frac{\sigma_v}{200 \text{ km/s}} \right)^2 \left( \frac{d_{LS}}{d_s} \right) \quad (31)$$

از این می‌توان نتیجه گرفت که مقیاس زاویه‌ای اثر عدسی گرانشی در کهکشان‌های پر جرم حدود یک ثانیه قوسی است.

<sup>۱</sup>Critical surface mass density

<sup>۲</sup>Singular Isothermal Sphere