معمولا Λ بسیار بزرگ است و می‌توان تقریب زد $\frac{1}{2}\ln(1+\Lambda^2) \approx \ln(\Lambda)$ ، که لگاریتم کولن نام دارد. به علاوه، می‌توان V_0 را با سرعت معمول v_{typ} جای‌گزین کرد. معادله‌ی ۱۴.۱ بیان می‌دارد که ذراتی که سرعت $\mathbf{v}_m$ دارند یک نیرو روی M اعمال می‌کنند که موازی با $\mathbf{v}_m - \mathbf{v}_M$ عمل می‌کند و به طور معکوس متناسب با مربع این بردار است. مساله‌ی انتگرال‌گیری روی تمام سرعت‌ها $\mathbf{v}_m$ معادل با یافتن پتانسیل گرانشی در نقطه‌ای با بردار مکان در فضای سرعت $\mathbf{v}_M$ است، که توسط چگالی جرمی $\rho(\mathbf{v}_m) = 4\pi\ln(\Lambda)Gm(m+M)f(\mathbf{v}_m)$ تولید شده است. اگر ذرات همسان‌گرد حرکت کنند، توزیع چگالی کروی است ، و طبق قضیه‌ی اول و دوم نیوتن ، شتاب کل M معادل با G/v_M^2 ضرب در جرم کل در سرعت‌های $v_m < v_M$ است. بنابراین

$$\frac{d\mathbf{v}M}{dt} = -16\pi^2\ln(\Lambda)G^2m(m+M)\frac{\int_0^{v_M} f(\mathbf{v}_m)v_m^2 dv_m}{v_M^3}\mathbf{v}_M \qquad (16.1)$$

به عبارت دیگر تنها ذرات m با سرعت‌هایی کم‌تر از M در نیرویی که همواره مخالف جهت حرکت M است شرکت می‌کنند و این معادله معروف به معادله‌ی اصطکاک دینامیکی چاندراسخار است.

اگر توزیع سرعت $f(v_m)$ توزیع ماکسولی با پخشی σ باشد،

$$f = \frac{n_0}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}}\exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right) \qquad (17.1)$$

$\rho = n_0 m$ چگالی زمینه است. با انتگرال‌گیری بدست می‌آوریم

$$\frac{d\mathbf{v}_M}{dt} = -\frac{4\pi\ln(\Lambda)G^2\rho M}{v_M^3}\left[\mathrm{erf}(\mathrm{X}) - \frac{2\mathrm{X}}{\sqrt{\pi}}\exp(-\mathrm{X}^2)\right]\mathbf{v}_M \qquad (18.1)$$

که $X = v_M/\sqrt{2}\sigma$. این فرمول به ازای $M \gg m$ برقرار است.
با استفاده از این رابطه می‌توانیم روابط کاربردی دیگری بدست آوریم. اگر $\ln\Lambda$ ثابت باشد، می‌توانیم زمان سقوط مارپیچی یک خوشه ستاره‌ای یا کهکشان کوتوله به درون سیستم میزبان را محاسبه نماییم:

$$t_{\mathrm{fric}} = \frac{1.17D_0^2 v_{\mathrm{circ}}}{\ln(\Lambda)GM} = \frac{2.64\times 10^{11}}{\ln(\Lambda)}\left(\frac{D_0}{2\mathrm{kpc}}\right)^2\left(\frac{v_{\mathrm{circ}}}{250\mathrm{kms}^{-1}}\right)\left(\frac{10^6 M_\odot}{M}\right)yr \qquad (19.1)$$

اگرچه ممکن است به نظر برسد بدست آوردن رابطه‌ی چاندراسخار تعریف‌ها و تقریب‌های مبهم دارد اما نشان داده شده است که یک ابزار قدرتمند در توصیف اصطکاک دینامیکی در محیط‌های کهکشانی مختلف است.

۳.۱ مدارها در پتانسیل‌های با تقارن محوری

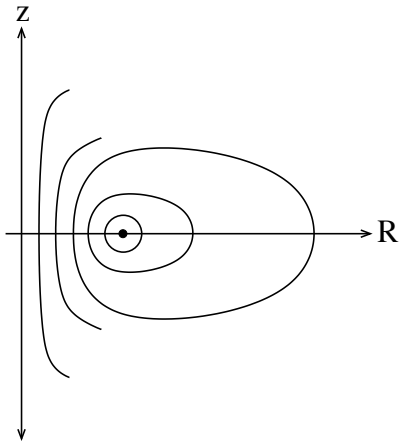
از نظر تجربی می‌دانیم که اغلب کهکشان‌ها تقارن کروی ندارند، اما به صورت دیسک یا بیضی‌گون هستند. برای بسیاری از این کهکشان‌ها پتانسیل‌های کلی‌تر، تقارن سمتی و تقارن بالا-پایین $(z \to -z)$ تقریب‌های خوبی هستند. بنابراین پتانسیل را به این صورت می‌توانیم بنویسیم : $\Phi(R,\phi,z) = \Phi(R,|z|)$. از روابط گرادیان در دستگاه استوانه‌ای $\ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla}\Phi$ داریم

$$\hat{e}_R : \ddot{R} - R\dot{\phi}^2 = -\frac{\partial\Phi}{\partial R}, \quad \hat{e}_\phi : \frac{d}{dt}(R^2\dot{\phi}) = 0, \quad \hat{e}_z : \ddot{z} = -\frac{\partial\Phi}{\partial z} \qquad (20.1)$$

مشابه حالت تقارن کروی، می‌توانیم پتانسیل مؤثری با استفاده از تکانه زاویه‌ای حول محور z تعریف نماییم، $L_z = R\dot{\phi}^2$:

$$\Phi_{\mathrm{eff}} = \Phi + \frac{L_z^2}{2R^2} \qquad (21.1)$$

www.darkenergy.ir



شکل ۳.۱: منحنی‌های پتانسیل ثابت. نقطه نمایش‌گر مدار دایره‌ای مرجع است که در آن پتانسیل مؤثر کمینه می‌شود.

بنابراین رابطه معادله‌ی حرکت در راستای شعاعی می‌شود

$$\ddot{R} = -\frac{\partial \Phi_{\text{eff}}}{\partial R} \tag{۲۲.۱}$$

همچنین معادله‌ی حرکت در راستای محور z نیز خواهد شد

$$\ddot{z} = -\frac{\partial \Phi_{\text{eff}}}{\partial z} \tag{۲۳.۱}$$

و معادله‌ی انرژی می‌شود

$$E = \frac{۱}{۲}(\dot{R}^۲ + \dot{z}^۲) + \Phi_{\text{eff}} \tag{۲۴.۱}$$

در شکل ۳.۱ منحنی‌های با پتانسیل مؤثر ثابت را نمایش داده‌ایم، به ازای یک L_z مشخص، کمینه‌ی انرژی مؤثر در نقطه R_g روی محور R اتفاق می‌افتد. ذره‌ای دقیقا در این کمینه انرژی مداری دایره‌ای را طی خواهد کرد، که بسامد مداری آن هست

$$\Omega^۲ = \frac{۱}{R}\frac{\partial \Phi}{\partial R} \tag{۲۵.۱}$$

می‌توانیم پتانسیل مؤثر را حول نقطه‌ی R_g بسط دهیم

$$\Phi_{\text{eff}} \approx \Phi(R_g, ۰) + \frac{۱}{۲}\left(\frac{\partial^۲ \Phi_{\text{eff}}}{\partial R^۲}\right)_{(R_g,۰)} x^۲ + \frac{۱}{۲}\left(\frac{\partial^۲ \Phi_{\text{eff}}}{\partial z^۲}\right)_{(R_g,۰)} z^۲ \tag{۲۶.۱}$$

که جابجایی شعاعی را $x \equiv R - R_g \ll R_g$ تعریف کرده‌ایم.
اگر ذره‌ی آزمون در مدار دایره‌ای دچار یک اختلال کوچک شعاعی شود، معادله‌ی حرکت آن به صورت نوسانی در می‌آید

$$\ddot{x} + \kappa^۲ x = ۰ \tag{۲۷.۱}$$

که بسامد شعاعی حرکت پیرا دایره‌ای تعریف می‌شود

$$\kappa^۲ \equiv \left(\frac{\partial^۲ \Phi_{\text{eff}}}{\partial R^۲}\right)_{(R_g,۰)} \tag{۲۸.۱}$$

www.darkenergy.ir

به روش مشابهی، اگر مدار ستاره در راستای عمود بر صفحه حرکت، دچار اختلال شود نیز یک حرکت نوسانی عمودی را اجرا خواهد کرد

$$\ddot{z} + \nu^2 z = 0, \quad \nu^2 \equiv \left(\frac{\partial^2 \Phi_{\text{eff}}}{\partial z^2}\right)_{(R_g,0)} \tag{۲۹.۱}$$

که ν بسامد نوسان عمودی است.
با بزرگ‌تر شدن دامنه نوسانات، بسط تیلور قبل دیگر صحیح نخواهد بود اما ماهیت مدارها همان خواهد ماند. در حالت کلی در حرکت پیرا دایره‌ای، بسامدهای عمودی و مداری لزوما یکسان نیستند. تنها در مورد پتانسیل کپلر و پتانسیل نوسان‌گر هماهنگ یکسان هستند.

۱.۳.۱ مدارهای تقریبا دایره‌ای: تقریب پیرا دایره‌ای

برای اغلب پتانسیل‌های با تقارن محوری، ما به مسیرهای نزدیک به دایره با بسامد مداری متوسط $\Omega(R)$ علاقمندیم. این مدار دایره‌ای مانند یک مرکز راهنما[۳] برای مدار مختل‌شده عمل می‌کند. می‌توانیم پتانسیل مؤثر را حول این شعاع راهنما R_g در صفحه‌ی استوا $z = 0$ بسط دهیم

$$\Phi_{\text{eff}} \approx \Phi(R_g, 0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \Phi_{\text{eff}}}{\partial R^2}\right)_{(R_g,0)} x^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \Phi_{\text{eff}}}{\partial z^2}\right)_{(R_g,0)} z^2 \tag{۳۰.۱}$$

در این بخش، ما تنها به حرکت در صفحه مداری می‌پردازیم و z را برابر صفر در نظر می‌گیریم. x را در راستای شعاعی و y را در راستای چرخش مثبت فرض می‌کنیم. همان‌طور که در بخش قبل گفتیم، معادله حرکت نوسانی در راستای شعاعی هست

$$\ddot{x} + \kappa^2 x = 0 \tag{۳۱.۱}$$

که با استفاده از تعریف ۲۸.۱ داریم

$$\kappa^2 = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2}\right)_{R_g} + \frac{3L_z^2}{R_g^4} = \left(R\frac{d\Omega^2}{dR} + 4\Omega^2\right)_{R_g} \tag{۳۲.۱}$$

با بهره‌گیری از رابطه‌ی بین سرعت دایره‌ای و پتانسیل $v^2/r = d\Phi/dr$ بسامد مداری را می‌توان نوشت

$$\Omega^2 = \frac{1}{R}\frac{\partial \Phi}{\partial R} = \frac{L_z^2}{R^4} \tag{۳۳.۱}$$

جواب معادله‌ی نوسان‌گر هماهنگ در راستای شعاعی به این شکل خواهد بود

$$x(t) = X\cos(\kappa t + \psi) \tag{۳۴.۱}$$

که زاویه‌ی فاز ψ با شرایط اولیه تعیین می‌شود. اما در راستای زاویه‌ای ϕ برای ذره‌ای که حرکت نوسانی شعاعی انجام می‌دهد چه رخ خواهد داد؟ مکان زاویه‌ای در مدار را با استفاده از پایستگی تکانه زاویه‌ای و کوچک بودن اختلال‌ها $x \ll R_g$ می‌توان به این صورت نوشت

[۳] Guiding center

www.darkenergy.ir

$$\dot{\phi} = \frac{L_z}{R^۲} = \frac{L_z}{R^۲\left(۱+\frac{x}{R_g}\right)^۲} \approx \Omega_g\left(۱-\frac{۲x}{R_g}\right) \tag{۳۵.۱}$$

با انتگرال‌گیری خواهیم داشت

$$\phi(t) = \Omega_g t + \phi_\circ - \frac{۲\Omega_g}{\kappa R_g} X\sin(\kappa t+\psi) \tag{۳۶.۱}$$

کمیت y را به عنوان فاصل از مدار دایره‌ای راهنما در راستای زاویه‌ای تعریف می‌کنیم

$$y \equiv R_g(\phi-\phi_g) = -\frac{۲\Omega_g}{\kappa} X\sin(\kappa t+\psi) = Y\sin(\kappa t+\psi) \tag{۳۷.۱}$$

چون هر دو مختصه‌ی x و y حرکت نوسانی هماهنگ با بسامد یکسان κ اجرا می‌کنند، مسیرهای بیضی شکل را پیرا دایره‌هایی حول مرکز راهنما می‌نامند. برخی روابط مفید را می‌توان از روابط قبل بدست آورد:

$$\frac{۱}{۲} < \frac{X}{Y} = \frac{\kappa}{۲\Omega_g} < ۱ \tag{۳۸.۱}$$

که حد پایین (۱/۲) معادل پتانسیل کپلری و حد بالا معادل پتانسیل هماهنگ است. با متوسط‌گیری روی یک پیرا دایره‌ی کامل ($\kappa t = \circ \to ۲\pi$) بدست می‌آوریم

$$\frac{\langle \dot{y}^۲\rangle_{\rm orbit}}{\langle \dot{x}^۲\rangle_{\rm orbit}} = \frac{۴\Omega_g^۲}{\kappa^۲} \tag{۳۹.۱}$$

اما اگر به جای زاویه روی حجم فضایی که مدارهای متعددی در آن هستند انتگرال بگیریم (با استفاده از معادلات جینز) نتیجه عکس قبل را بدست می‌آوریم

$$\frac{\langle \dot{y}^۲\rangle_{\rm vol}}{\langle \dot{x}^۲\rangle_{\rm vol}} = \frac{\kappa^۲}{۴\Omega_g^۲} \tag{۴۰.۱}$$

با استفاده از روابط اوورت سرعت شعاعی در راستای خط دید ناظر هست

$$v_{\rm los} = d(A\sin ۲l) \tag{۴۱.۱}$$

و سرعت عرضی هست

$$v_T = d(A\cos ۲l + B) \tag{۴۲.۱}$$

و از آن حرکت خاصه (بر حسب ثانیه قوسی در سال) می‌شود

$$\mu = v_T/d = A\cos ۲l + B \tag{۴۳.۱}$$

با استفاده از تعریف روابط اوورت بسامد پیرا دایره‌ای بدست می‌آید

$$\kappa^۲ = -۴B(A-B) \tag{۴۴.۱}$$

www.darkenergy.ir

۴.۱ کهکشان راه شیری

۱.۴.۱ شمارش ستارگان در کهکشان

در این بخش بنا نداریم وارد جزئیات شمارش ستارگان در کهکشان شویم و تنها به اختصار و بعضی مقدمات اشاره می‌کنیم. فرض می‌کنیم در فضا هیچ جذب میان ستاره‌ای وجود ندارد و سراسر فضای اطراف با ستارگان یکسانی با قدر مطلق M با چگالی یکنواخت احاطه شده است. هدف ما یافتن تعداد ستاره‌های درخشان‌تر از قدر ظاهری m است $N(m)$. می‌دانیم که ستاره‌ای با قدر ظاهری m در فاصله زیر واقع است

$$d = ۱۰^{۱+۰/۲(m-M)} pc. \tag{۴۵.۱}$$

تمامی ستاره‌هایی که درون کره‌ای به حجم $(۴\pi/۳)d^۳$ واقع شده‌اند درخشان‌تر از قدر m به نظر می‌رسند. واضح است که تعداد چنین ستاره‌هایی $N(m)$ متناسب با $d^۳$ است، بنابراین می‌توان نوشت

$$N(m) = C_۱ ۱۰^{۰/۶m} \tag{۴۶.۱}$$

که $C_۱$ ثابت است. بنابراین، اگر تعداد ستاره‌های رصد شده $N(m)$ تا حد قدر m از رابطه‌ی ۴۶.۱ تبعیت کند، می‌توان نتیجه گرفت که ستاره‌ها تا فاصله d به صورت یکنواخت در فضا توزیع شده‌اند. اگر تعداد رصدی $N(m)$ نسبت به مقدار نظری پیش‌بینی شده با رابطه‌ی ۴۶.۱ افت نماید، می‌فهمیم که به مرز سیستم ستاره‌ای که فاصله‌اش متناظر با قدر m است رسیده‌ایم. بررسی این‌که آیا تعداد ستاره‌های رصدی از یک دسته خاص از ستارگان با رابطه‌ی ۴۶.۱ تطابق دارد یا خیر یک آزمون قدرت‌مند برای یافتن توزیع یکنواخت ستارگان حول ما است. همچنین این آزمون می‌تواند برای یافتن توزیع کهکشان‌ها اطراف راه شیری نیز به کار رود.

اگر کیهان ما بی‌نهایت و با توزیع یکنواخت از ستارگان بود، می‌توان نشان داد که روشنایی آسمان باید بی‌نهایت می‌بود (پارادوکس اولبرس[۴]). شمارش جزئی ستارگان $A(m)$ (تعداد ستارگانی که قدر ظاهری‌شان بین m و $m+dm$ باشد برابر است با $A(m)dm$) با رابطه زیر داده می‌شود

$$A(m) = \frac{dN(m)}{dm} = C_۲ ۱۰^{۰/۶m} \tag{۴۷.۱}$$

که $C_۲ = ۰/۶C_۱ \ln ۱۰$ است. با استفاده از رابطه‌ی روشنایی $\frac{l_۲}{l_۱} = (۱۰۰)^{\frac{۱}{۵}(m_۱-m_۲)}$ می‌دانیم که نور دریافت شده از ستاره‌ای با قدر ظاهری m توسط ناظر می‌تواند به این صورت نوشته شود

$$l(m) = l_۰ ۱۰^{-۰/۴m} \tag{۴۸.۱}$$

پس نور دریافت شده توسط ناظر از تمام ستاره‌هایی با قدر ظاهری بین m و $m+dm$ برابر است با

$$l(m)A(m)dm = l_۰ C_۲ ۱۰^{۰/۲m} dm \tag{۴۹.۱}$$

نور مجموع دریافت شده از تمام ستاره‌های درخشان‌تر از m بدست می آید

$$\mathcal{L} = \int_{-\infty}^{m} l(m')A(m')dm' = l_۰ C_۲ \int_{-\infty}^{m} ۱۰^{۰/۲m'} dm' = K ۱۰^{۰/۲m}, \qquad K = \frac{l_۰ C_۲}{۰/۲ \ln ۱۰} = ۳l_۰ C_۱ \tag{۵۰.۱}$$

از رابطه‌ی ۵۰.۱ مشخص است وقتی ستاره‌های کم‌نور تر که در فواصل بزرگ‌تر واقعند را هم در نظر می‌گیریم $\mathcal{L}$ به صورت نمایی با m واگرا می‌شود. چون ابعاد کهکشان محدود است، می‌توان پارادوکس اولبرس را برطرف کرد.

[۴] H. Olbers (1758-1840)

www.darkenergy.ir

◄ **تمرین ۱:** در این بخش فرض کردیم که تمام ستاره‌ها قدر مطلقی برابر M دارند و هیچ جذب میان ستاره‌ای وجود ندارد. حال، فرض کنید کسری از ستارگان $\Phi(M)dM$ که قدر مطلق‌شان بین M و $M+dM$ است، در حالی که $a(r)$ تغییر در قدر یک ستاره در فاصله‌ی r به دلیل جذب فضای میان ستاره‌ای است. فرض نمایید، $A(m)dm$ تعداد ستاره‌هایی درون زاویه‌ی فضایی Ω است که قدر ظاهری‌شان بین m و $m+dm$ قرار می‌گیرد. اگر $D(r)$ چگالی تعداد ستاره‌هایی در فاصله‌ی r باشد، نشان دهید

$$A(m) = \Omega \int_{\circ}^{\infty} \Phi\left[m + ۵ - ۵\log r - a(r)\right] D(r) r^{۲} dr$$

نشان دهید این رابطه به معادله‌ی ۴۷.۱ تقلیل می‌یابد اگر تمام ستاره‌ها قدر مطلق یکسان و توزیع فضایی همگن داشته باشند و هیچ جذب میان‌ستاره‌ای نداشته باشیم.

۲.۴.۱ خاموشی میان‌ستاره‌ای و قرمزگرایی

در مدل کپتین[۵] که در بخش قبل به آن اشاره شده خورشید در مرکز است، و راه شیری حول ما به صورت متقارن به نظر می‌رسد. اما امروزه می‌دانیم که خورشید تقریبا در لبه‌های کهکشان واقع است. دلیل اصلی برداشت متقارن بودن راه شیری حول خورشید به دلیل جذب نور ستارگان در فضای میان ستاره‌ای و مانع شدن دید ما به سوی اعماق کهکشان است و به همین دلیل فقط بخشی از دیسک را می‌بینیم و تصور تقارن حول ما شکل می‌گیرد.
اولین بار ترامپلر[۶] اثبات واضحی برای وجود جذب محیط میان ستاره‌ای ارائه داد. وی بر روی خوشه‌های باز (که خوشه‌های نه چندان مقید با چند ده ستاره هستند) مطالعه‌ای آماری انجام داد. بر خلاف خوشه‌های کروی که تعداد زیادی از آن‌ها دورتر از دیسک کهکشان یافت می‌شوند، خوشه‌های باز اغلب در دیسک قرار دارند. با این فرض که خوشه‌های باز به صورت آماری ابعاد یکسان دارند، می‌توان فاصله‌ی آن‌ها را از روی قطر زاویه‌ای تخمین زد. ترامپلر دریافت که ستاره‌ها در خوشه‌های باز دورتر کم‌نور تر از حالتی که در مدل ساده‌ای که شدت با عکس مجذوری فاصله افت می‌کند ، به نظر می‌رسند، که به وضوح نشان می‌دهد نور ستاره‌هایی که از خوشه‌های دور می‌آیند تضعیف می‌شوند. محیط میان‌ستاره‌ای شامل ذراتی از گرد و غبار و گاز است که موجب جذب نور ستاره‌ها می‌شود.
در حضور جذب میان ستاره‌ای مدول فاصله باید به صورت زیر اصلاح شود

$$m = M + ۵\log d - ۵ + A_{\lambda} \qquad (۵۱.۱)$$

که A_{λ} جذب محیط را می‌دهد. واضح است که این کمیت باید مثبت باشد تا موجب افزایش قدر شود. برای نور مرئی که از ستارگان صفحه کهکشان می‌آید جمله جذب به صورت تخمینی با فاصله به صورت زیر رابطه دارد

$$A_V \approx ۱/۵d \qquad (۵۲.۱)$$

که فاصله بر حسب کیلوپارسک نوشته می‌شود.

◄ **تمرین ۲:** محیط میان‌ستاره‌ای در صفحه (دیسک) کهکشان درخشندگی ستارگان را به اندازه‌ی ۱/۵ قدر در هر کیلو پارسک کاهش می‌دهد (قدر افزایش می‌یابد) .

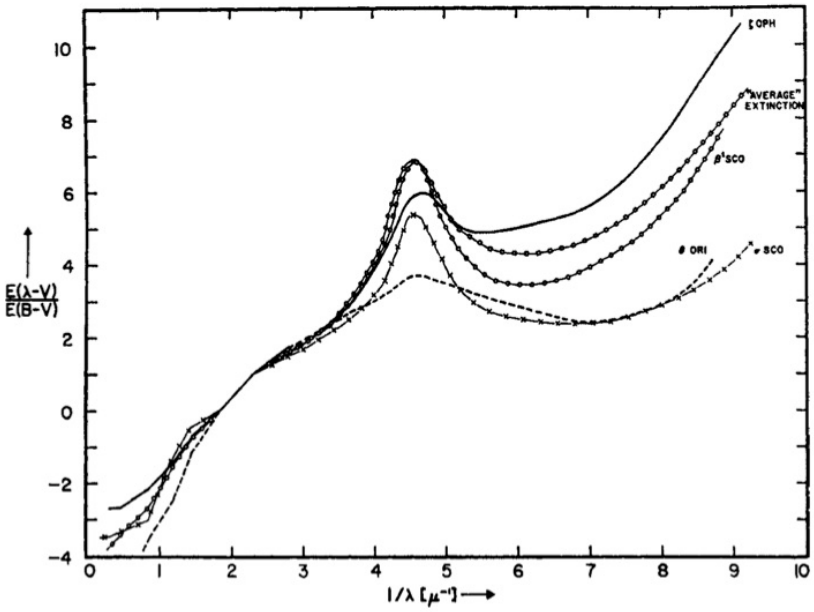
الف: نشان دهید این پدیده حاکی از این است که روشنایی ستاره‌ها در دیسک با فاصله به صورت زیر افت می‌کند

$$\frac{e^{-\alpha r}}{r^{۲}}$$

ب: مقدار پارامتر α را بیابید.

[۵] J. Kapteyn (1851-1922)
[۶] R. Trumpler (1886-1956)

www.darkenergy.ir



شکل ۴.۱: خاموشی میان ستاره‌ای برای چند ستاره [؟]

از آن‌جا که ذرات غبار در طول موج‌های کوتاه‌تر (آبی‌تر) نور بیشتری جذب می‌کنند، ستارگان دور قرمز تر به نظر می‌رسند. قرمزیت یک ستاره را با $(B-V)$ نشان می‌دهیم. با عبور نور ستاره از محیط میان ستاره‌ای ، قرمزیت ستاره افزایش می‌یابد. تغییر در قرمزیت را با $E(B-V)$ نمایش می‌دهیم و به صورت یک قاعده سر انگشتی در صفحه کهکشان با فاصله به این شکل رابطه دارد

$$E(B-V) \approx ۰/۵d \qquad (۵۳.۱)$$

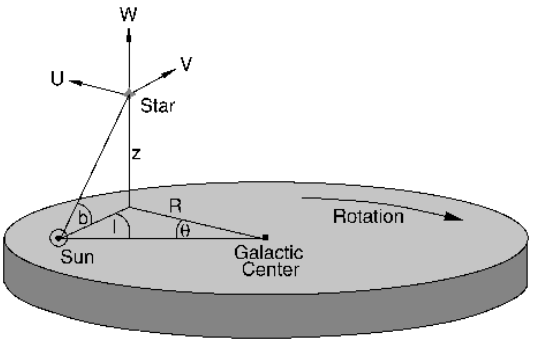
چون A_λ و $E(B-V)$ هر دو به صورت خطی با فاصله رابطه دارند، نسبت آن‌ها $\frac{A_\lambda}{E(B-V)}$ مستقل از فاصله و معیاری برای اندازه‌گیری خاموشی میان‌ستاره‌ای به صورت تابعی از طول موج است. در شکل ۴.۱ کمیت $\frac{A_\lambda}{E(B-V)}$ به صورت تابعی از طول موج برای چند ستاره رسم شده است. همان‌طور که می‌بینید خاموشی در حدود طول موج $۲۲۰۰\dot{A}$ است که معمولا به دلیل خاکستر کربن موجود در غبار تفسیر می‌شود. اگر به شکل ۴.۱ دقت نماییم، برازش یک خط راست تقریب چندان بدی نیست و نشان می‌دهد که جذب میان ستاره‌ای تقریبا به صورت $\lambda^{-۱}$ رفتار می‌کند که از پراکندگی رایلی $\lambda^{-۴}$ وابستگی ضعیف‌تری به طول موج دارد.
وجود جذب محیط میان ستاره‌ای و قرمزگرایی موجب پیچیدگی بیشتر شمارش تعداد ستارگان می‌شود. البته روش‌های سیستماتیکی برای مواجهه با اثرات محیط میان ستاره‌ای وجود دارد. خوش‌بختانه غبار میان‌ستاره‌ای در یک لایه به ضخامت حدود $\pm ۱۵۰pc$ حول صفحه‌ی کهکشان محدود شده است. بنابراین وقتی در جهت‌های دورتر از صفحه کهکشان نگاه می‌کنیم دید ما توسط خاموشی یا قرمزگرایی خراب نمی‌شود. از مدت‌ها پیش منجمان می‌دانند که کهکشان‌های دیگر را در یک منطقه باریک نزدیک صفحه کهکشان که منطقه اجتناب[۷] نامیده می‌شود نمی‌توانند ببینند.

۵.۱ چرخش کهکشانی

میدان گرانشی در یک نقطه درون یا نزدیک کهکشان به سمت مرکز کهکشان است. اما چگونه این میدان گرانشی خنثی می‌شود و همه چیز به صورت یک سقوط آزاد عمومی به درون مرکز کهکشان نمی‌افتد؟ دو روش کلی برای تعادل با گرانش وجود دارد. ساده‌ترین روش حرکت دایره‌ای ستاره‌ها در مدارشان است بطوری‌که نیروی مرکزگرا با گرانش در تعادل می‌شود.

[۷] Zone of avoidance

www.darkenergy.ir



شکل ۵.۱: مختصات استوانه‌ای کهکشان

روش دیگر از طریق حرکت‌های تصادفی است. لیندبلد[۸] اولین بار پی برد که کهکشان ما باید دو زیر مجموعه داشته باشد. اغلب ستاره‌ها در دیسک در مدار تقریبا دایره‌ای حول مرکز کهکشان حرکت می‌کنند و زیر مجموعه اول را تشکیل می‌دهند. لیندبلد از روی شکل تقریبا کروی هاله‌ی خوشه‌های کروی، حدس زد که این سیستم باید یک زیر مجموعه غیر چرخان باشد که گرانش توسط حرکت‌های تصادفی خنثی می‌شود. در هر لحظه از زمان، یک خوشه‌ی کروی باید به سمت مرکز کهکشان سقوط نماید. اما، در نهایت این خوشه کروی از طرف دیگر کهکشان خارج خواهد شد چرا که انرژی جنبشی در حین سقوط بدست آورده است. اگرچه برخی از خوشه‌های کروی ممکن است به سمت مرکز کهکشان سقوط نمایند و باقی آن‌ها از آن دور شوند، شکل آماری کلی مجموعه خوشه‌های کروی نباید با زمان تغییر کند.

۱.۵.۱ چرخش شناسی کهکشان

کهکشان یک جسم صلب نیست و در فواصل مختلف از مرکز با سرعت‌های متفاوتی می‌چرخد. این بدان معناست که سرعت زاویه‌ای تابعی از فاصله R از مرکز است. اگر از بالای کهکشان یا به عبارتی از NGP نگاه کنیم، چرخش کهکشان ساعت‌گرد است. برای توصیف میدان سرعت به صورت کمی مؤلفه‌های سرعت را در دستگاه مختصات (R, θ, z) (مطابق شکل ۵.۱) می‌نویسیم. سرعت جسم در این مختصات به صورت زیر بیان می‌شود

$$U := \frac{dR}{dt}, \quad V := R\frac{d\theta}{dt}, \quad W := \frac{dz}{dt} \tag{۵۴.۱}$$

به عنوان مثال ، خورشید در یک دایره عادی حول مرکز کهکشان حرکت نمی‌کند ، بلکه در زمان فعلی به سمت داخل کهکشان $U < 0$ و $W > 0$ از صفحه کهکشان در حال دور شدن است.

به منظور ارتباط بین اندازه‌گیری‌های موضعی با دستگاه مختصات کهکشانی (R, θ, z) ، **استاندارد محلی سکون**[۹] تعریف می‌شود. LSR یک چارچوب سکون فرضی است که در آن سرعت‌ها اندازه گرفته می‌شوند. برای این منظور، ما یک نقطه را در نظر می‌گیریم که امروز در مکان خورشید قرار دارد و در امتداد یک مدار دایره‌ی کامل در صفحه کهکشان حرکت می‌کند. مؤلفه‌های سرعت در LSR به این صورت تعریف می‌شوند

$$U_{LSR} \equiv 0, \quad V_{LSR} \equiv V_0, \quad W_{LSR} \equiv 0 \tag{۵۵.۱}$$

که $V_0 \equiv V(R_0)$ سرعت مداری در مکان خورشید است. اگرچه مکان LSR با زمان عوض می‌شود، اما مقیاس زمانی این تغییر در مقایسه با عمر رصدها بسیار بزرگ است (تناوب مداری تقریبا ۲۳۰ میلیون سال است) و می‌توان از جابجایی صرف‌نظر نمود.

سرعت یک جسم نسبت به LSR *سرعت خاصه* نامیده می‌شود. سرعت خاصه را با v نمایش می‌دهند و مؤلفه‌های آن به صورت زیر داده می‌شود

[۸] B. Lindblad(1895-1965)
[۹] Local Standard of Rest

www.darkenergy.ir

$$v \equiv (u, v, w) = (U - U_{LSR}, V - V_{LSR}, W - W_{LSR}) = (U, V - V_{\circ}, W) \qquad (۵۶.۱)$$

سرعت خورشید نسبت به LSR با $v_{\odot}$ نمایش داده می‌شود. اگر $v_{\odot}$ مشخص باشد، هر سرعتی که نسبت به خورشید اندازه گرفته شود می‌تواند به سرعت نسبت به LSR تبدیل شود: فرض کنیم Δv سرعت یک ستاره نسبت به خورشید باشد، پس سرعت خاصه این ستاره می‌شود

$$v = v_{\odot} + \Delta v \qquad (۵۷.۱)$$

حال، آنسامبلی از ستارگان در همسایگی نزدیک خورشید در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم کهکشان تقارن محوری دارد و پایا است. با این فرض‌ها، تعداد ستاره‌هایی که به سمت شعاع‌های بزرگ‌تر R به بیرون حرکت می‌کنند برابر تعداد ستاره‌های در حال حرکت درون سو است. به همین ترتیب، همان تعداد ستاره که بالاسو از صفحه کهکشان دور می‌شوند همان تعداد نیز در جهت مخالف حرکت می‌کنند. اگر این شرایط برقرار نباشد، فرض توزیع پایا در کهکشان نقض می‌شود. مقدار متوسط مؤلفه‌های سرعت‌های خاصه متناظر باید صفر شود

$$\langle u \rangle = \circ, \quad \langle w \rangle = \circ \qquad (۵۸.۱)$$

که $\langle\rangle$ نمایش‌گر متوسط روی تمام ستارگان آنسامبل است. بحث مشابه درباره مؤلفه v معتبر نیست چرا که سرعت متوسط v به توزیع مدارها وابسته است: اگر فقط مدارهای دایره‌ای در کهکشان داشتیم می‌داشتیم $\langle v \rangle = \circ$ (چرا که همه ستاره‌ها $v = \circ$ دارند)، اما از بررسی آماری مدارها در چارچوب دینامیک ستاره‌ای، می‌توان بدست آورد که $\langle v \rangle$ بسیار وابسته به سرعت پخشی شعاعی ستاره‌هاست: هر چه سرعت پخشی شعاعی بیشتر باشد $\langle v \rangle$ از صفر بیشتر فاصله می‌گیرد. بعدتر خواهیم دید

$$\langle v \rangle = -C\langle u^{۲} \rangle \qquad (۵۹.۱)$$

که C یک ثابت مثبت است و وابسته به توزیع چگالی و توزیع سرعت موضوعی ستاره‌هاست. علامت رابطه‌ی ۵۹.۱ از این نکته می‌آید که یک مدار دایره‌ای سرعت مماسی بیشتری نسبت به یک مدار بیضوی که مؤلفه سرعت شعاعی غیر صفر نیز دارد، دارا می‌باشد. معادله‌ی ۵۹.۱ این واقعیت را بیان می‌نماید که سرعت چرخشی متوسط یک جمعیت ستاره‌ای حول مرکز کهکشان از سرعت مداری دایره‌ای متناظر انحراف دارد، و این انحراف برای پخش سرعت شعاعی بزرگ‌تر، شدیدتر می‌شود. این پدیده به نام رانش نامتقارن[۱۰] شناخته می‌شود. از متوسط‌گیری معادله‌ی ۵۷.۱ روی تمام آنسامبل و استفاده از معادلات ۵۸.۱ و ۵۹.۱ بدست می‌آید

$$v_{\odot} = \left(-\langle \Delta u \rangle, -C\langle u^{۲} \rangle - \langle \Delta v \rangle, -\langle \Delta w \rangle\right) \qquad (۶۰.۱)$$

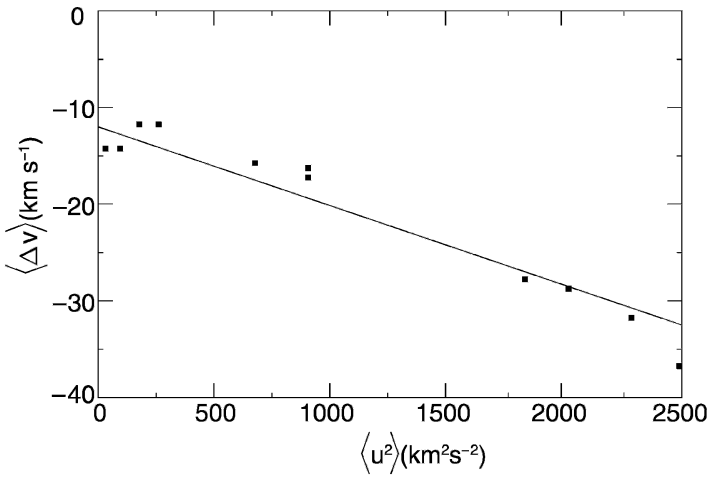
برای استفاده از این رابطه باید ثابت C نیز تعیین شود. برای این کار جمعیت‌های ستاره‌ای مختلفی در نظر می‌گیریم و $\langle u^{۲} \rangle$ و $\langle \Delta v \rangle$ را به طور جداگانه اندازه می‌گیریم. اگر این دو کمیت را در یک نمودار مشخص نماییم (شکل ۱.۵.۱) یک رابطه‌ی خطی بدست می‌آید که شیب این خط همان C از روی شکل بدست می‌آید. علاوه بر این، از قطع دادن خط با محور $\langle \Delta v \rangle$ کمیت $v_{\odot}$ نیز بدست می‌آید. دیگر مؤلفه‌های سرعت خورشید نیز با متوسط‌گیری بدست می‌آید و نتیجه می‌دهد

$$\mathbf{v}_{\odot} = (-۱\circ, ۵, ۷) km/s \qquad (۶۱.۱)$$

بنابراین، خورشید اکنون در حال حرکت به سمت داخل ، بالا سو و سریع‌تر از حرکت در یک مدار دایره‌ای است.
اکنون پخشی سرعت‌های ستاره‌ای نسبت به LSR می‌تواند تعیین شود. برای ستارگان جوان، این پخشی کوچک است. برای ستارگان پیرتر مانند غول‌های K پخشی بزرگ‌تر است، و برای ستارگان پیر، و ستارگان کوتوله قرمز با فلزیت کم، پخشی باز هم بزرگ‌تر خواهد بود. یک رابطه‌ی خوش تعریف بین فلزیت و سرعت ستارگان در کهکشان مشاهده می‌شود. وقتی این مطلب را با رابطه‌ی سن- فلزیت ترکیب کنیم به نظر می‌رسد پیرترین ستاره‌ها بیشترین سرعت‌های خاصه را دارند. این اثر

[۱۰] Asymmetric Drift

www.darkenergy.ir



شکل ۶.۱: مؤلفه‌های سرعت $\langle \Delta v \rangle = \langle v \rangle - v_\odot$ برای تعدادی ستاره در همسایگی خورشید رسم شده است. $\langle u^۲ \rangle$

در هر سه مختصه مشاهده شده است.

اگر ستارگان با سرعت زیاد را در نظر بگیریم، تنها تعداد کمی از آن‌ها یافت می‌شوند که v ۶۵km/s دارند و بسیار سریع‌تر از LSR حول مرکز کهکشان می‌چرخند. اما، تعداد کمی از ستارگان یافت شده‌اند که $v - ۲۵۰ km/s$ دارند، بنابراین سرعت مداری‌شان مخالف جهت چرخش LSR است. اگر سرعت‌ها را در یک نمودار $(u - v)$ رسم کنیم، یک توزیع باریک از سرعت ستارگان جوان حول $u = ۰, v = ۰ km/s$ و یک توزیع گسترده‌تر برای ستارگان پیرتر یافت می‌شود. برای پیرترین ستارگان متعلق به جمعیت هاله، یک پوسته دایره‌ای با مرکزیت $u = ۰ km/s$ و $v \approx -۲۲۰ km/s$ بدست می‌آید. اگر فرض کنیم که هاله‌ی کهکشان، که ستارگان با سرعت بالا به آن‌جا تعلق دارند، نمی‌چرخد (یا خیلی آهسته می‌چرخد)، این عدم تقارن در توزیع سرعت v تنها می‌تواند با فرض چرخش LSR ایجاد شود. مرکز پوسته باید در $-V_۰$ باشد. در نتیجه سرعت مداری LSR هست

$$V_۰ \equiv V(R_۰) = ۲۲۰ km/s \tag{۶۲.۱}$$

با دانستن این سرعت، می‌توانیم جرم کهکشان در فاصله‌ی بیرون از مدار خورشید محاسبه نماییم. برای یک مدار دایره‌ای می‌توانیم با برابر قرار دادن نیروی گرانش و نیروی مرکزگرا جرم را بدست می‌آوریم

$$M(R_۰) = \frac{V_۰^۲ R_۰}{G} = ۸/۸ \times ۱۰^{۱۰} M_\odot \tag{۶۳.۱}$$

دوره تناوب مداری LSR هم مشابه تناوب خورشید است

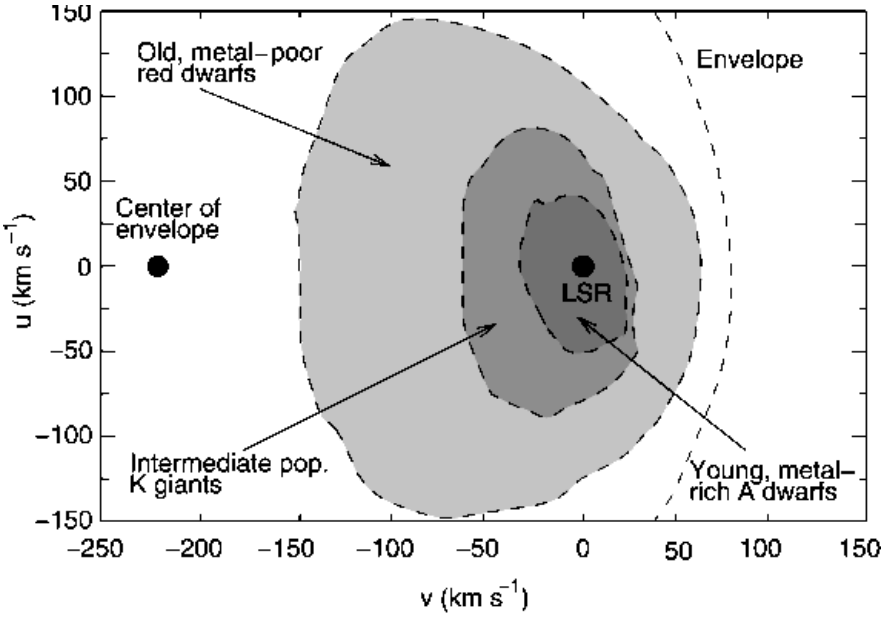
$$P = \frac{۲\pi R_۰}{V_۰} = ۲۳۰ \times ۱۰^۶ yr \tag{۶۴.۱}$$

با این اعداد، طی عمر منظومه شمسی، که حدود $۴/۶ \times ۱۰^۹ yr \sim$ تخمین زده می‌شود، منظومه شمسی حدود ۲۰ بار حول مرکز کهکشان چرخیده است.

۲.۵.۱ منحنی چرخش کهکشان

از رصد و اندازه‌گیری سرعت ستاره‌ها و ابرهای گازی در حال چرخش به دور مرکز کهکشان می‌توان سرعت V را به صورت تابعی از فاصله از مرکز R بدست آورد. در این بخش می‌خواهیم روشی برای تعیین سرعت بر حسب فاصله یا **منحنی چرخش** بیابیم. فرض می‌کنیم جسمی در فاصله‌ی R از مرکز کهکشان در حال حرکت دایره‌ای در صفحه‌ی کهکشان باشد و در فاصله‌ی D از خورشید و در طول کهکشانی ℓ نیز واقع است. در یک دستگاه مختصاتی دکارتی که مرکز آن منطبق بر مرکز کهکشان است، اگر θ زاویه‌ی بین خورشید و جسم مورد مشاهده باشد، بردارهای سرعت و مکان (در صفحه کهکشان)

www.darkenergy.ir



شکل ۷.۱: رابطه‌ی بین جمعیت ستاره‌ای و سرعت ستارگان دیسک کهکشان [؟]

به صورت زیر می‌توانند نوشته شوند

$$\vec{r} = R\begin{pmatrix}\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}, \quad \vec{V} = \dot{\vec{r}} = V(R)\begin{pmatrix}\cos\theta\\ -\sin\theta\end{pmatrix} \tag{۶۵.۱}$$

با توجه به هندسه‌ی شکل ۸.۱ می‌توان بردار مکان را نوشت

$$\vec{r} = \begin{pmatrix}D\sin\ell\\ R_\circ - D\cos\ell\end{pmatrix} \tag{۶۶.۱}$$

با توجه به شکل می‌توان این دو رابطه‌ی هندسی را نیز استخراج کرد

$$R\sin\theta = D\sin\ell R\cos\theta = R_\circ - D\cos\ell \tag{۶۷.۱}$$

اگر از تفاوت بین سرعت‌های خورشید و LSR چشم‌پوشی کنیم ، سرعت نسبی خورشید و جسم در دستگاه دکارتی می‌شود

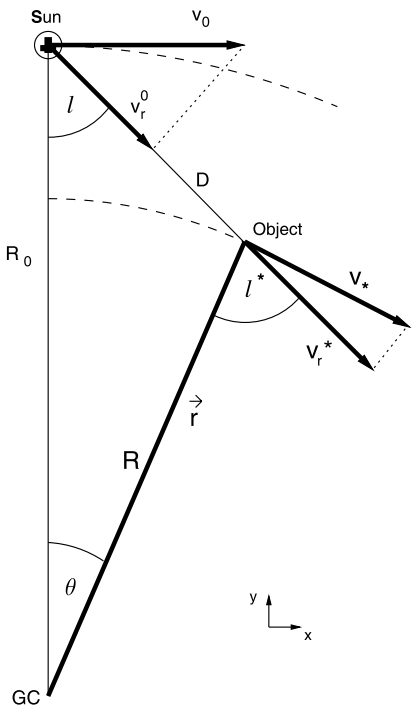
$$v_r = v_r^\star - v_r^\odot = v_\star\sin\ell^\star - v_\odot\sin\ell, v_t = v_t^\star - v_t^\odot = v_\star\cos\ell^\star - v_\odot\cos\ell, \tag{۶۸.۱}$$

از جایگذاری روابط هندسی سرعت‌های نسبی را می‌توان به این صورت بازنویسی کرد

$$v_r = R_\circ\left(\frac{v_\star}{R} - \frac{v_\odot}{R_\circ}\right)\sin\ell = (\Omega - \Omega_\circ)R_\circ\sin\ell v_t = R_\circ\left(\frac{v_\star}{R} - \frac{v_\odot}{R_\circ}\right)\cos\ell - D\frac{v_\star}{R} = (\Omega - \Omega_\circ)R_\circ\cos\ell - \Omega D \tag{۶۹.۱}$$

$$\Delta\vec{V} = \vec{V} - \vec{V}_\odot = \begin{pmatrix}V\frac{R_\circ}{R} - V\frac{D}{R}\cos\ell - V_\circ\\ -V\frac{D}{R}\sin\ell\end{pmatrix} \tag{۷۰.۱}$$

www.darkenergy.ir



شکل ۸.۱: هندسه چرخش کهکشانی

سرعت زاویه‌ای را تعریف کرده‌ایم

$$\Omega(R) = \frac{V(R)}{R} \tag{۷۱.۱}$$

بردار سرعت نسبی بدست می‌آید

$$\Delta\vec{V} = \begin{pmatrix} R_\circ(\Omega - \Omega_\circ) - \Omega D\cos\ell \\ -D\Omega\sin\ell \end{pmatrix} \tag{۷۲.۱}$$

که $\Omega_\circ = V_\circ/R_\circ$ سرعت زاویه‌ای خورشید است. سرعت‌های شعاعی و مماسی این حرکت نسبی با تصویر $\Delta\vec{V}$ در راستای موازی و عمود نسبت به بردار جابجایی بدست می‌آید

$$v_r = \Delta\vec{V}.\begin{pmatrix} \sin\ell \\ -\cos\ell \end{pmatrix} = (\Omega - \Omega_\circ)R_\circ\sin\ell \tag{۷۳.۱}$$

$$v_t = \Delta\vec{V}.\begin{pmatrix} \cos\ell \\ \sin\ell \end{pmatrix} = (\Omega - \Omega_\circ)R_\circ\cos\ell - \Omega D \tag{۷۴.۱}$$

۳.۵.۱ منحنی چرخش در همسایگی $R_\circ$ و ثوابت اورت

با استفاده از رابطه‌ی ۷۳.۱ می‌توان با اندازه‌گیری v_r سرعت زاویه‌ای را بدست آورد ، اما فاصله‌ی شعاعی R را نمی‌توان تعیین کرد. بنابراین با سجنش سرعت شعاعی به تنهایی نمی‌توان $\Omega(R)$ را تعیین کرد. اگر علاوه بر v_r ، سرعت خاصه $\mu = v_t/D$ ستارگان را نیز اندازه بگیریم، می‌توان از روابط بالا Ω و D را تعیین کرد و با دانستن D و ℓ و رابطه‌ی $R = \sqrt{R_\circ^۲ + D^۲ - ۲R_\circ D\cos\ell}$ فاصله شعاعی را بدست آورد. اما اثرات خاموشی بین ستاره‌ای مانع از به کار بردن

www.darkenergy.ir

این روش برای فواصل دور دست در کهکشان می‌شود، در این محاسبات نیز ما فرض کردیم اجرام درون دیسک کهکشانی هستند. برای فواصل نزدیک $D \ll R_\circ$ ، که نتیجه می‌دهد $|R - R_\circ| \ll R_\circ$ ، می‌توان یک تقریب موضعی با بسط روابط قبل تا مرتبه‌ی اول بر حسب $(R - R_\circ)/R_\circ$ بدست آورد. با فرض هموار بودن تابع $\Omega(R)$ می‌توانیم بسط دهیم

$$\Omega - \Omega_\circ \approx \left(\frac{d\Omega}{dR}\right)_{|R_\circ} (R - R_\circ) \tag{۷۵.۱}$$

با قرار دادن در رابطه‌ی ۷۳.۱

$$v_r = (R - R_\circ)\left(\frac{d\Omega}{dR}\right)_{|R_\circ} R_\circ \sin\ell \tag{۷۶.۱}$$

با مشتق گرفتن از تابع $\Omega(R) = V(R)/R$

$$R_\circ \left(\frac{d\Omega}{dR}\right)_{|R_\circ} \approx \left(\frac{dV}{dR}\right)_{|R_\circ} - \frac{V_\circ}{R_\circ} \tag{۷۷.۱}$$

با ادغام دو معادله اخیر، بدست می آید

$$v_r = \left[\left(\frac{dV}{dR}\right)_{|R_\circ} - \frac{V_\circ}{R_\circ}\right](R - R_\circ)\sin\ell \tag{۷۸.۱}$$

بطور مشابه برای سرعت مماسی نیز بدست می آید

$$v_t = \left[\left(\frac{dV}{dR}\right)_{|R_\circ} - \frac{V_\circ}{R_\circ}\right](R - R_\circ)\cos\ell - \Omega_\circ D \tag{۷۹.۱}$$

برای فواصل نزدیک وقتی $|R - R_\circ| \ll R_\circ$ از رابطه‌ی هندسی $R\cos\theta + D\cos\ell = R_\circ$ بدست می آوریم $R_\circ - R \approx D\cos\ell$؛ که اگر این رابطه را در معادلات ۷۸.۱ و ۷۹.۱ جای‌گذاری نماییم بدست می آوریم

$$v_r \approx AD\sin ۲\ell, \quad v_t \approx AD\cos ۲\ell + BD \tag{۸۰.۱}$$

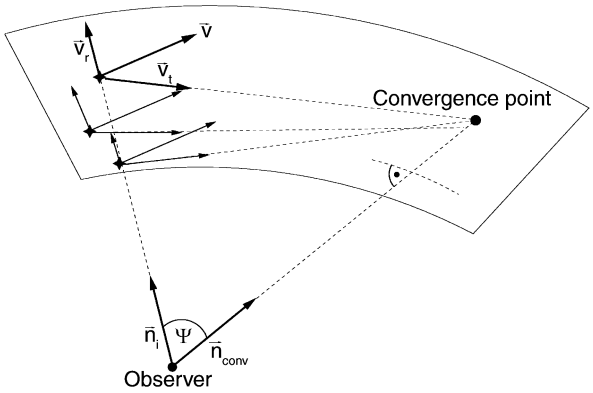
که ثوابت اورت[۱۱] A و B به این صورت تعریف می‌شوند

$$A := -\frac{۱}{۲}\left[\left(\frac{dV}{dR}\right)_{|R_\circ} - \frac{V_\circ}{R_\circ}\right] = -\frac{۱}{۲}R_\circ\frac{d\Omega}{dR}_{|R_\circ}, B := -\frac{۱}{۲}\left[\left(\frac{dV}{dR}\right)_{|R_\circ} + \frac{V_\circ}{R_\circ}\right] = -\frac{۱}{۲}R_\circ\frac{d\Omega}{dR}_{|R_\circ} - \Omega_\circ \tag{۸۱.۱}$$

از روابط ۸۰.۱ واضح است که سرعت‌های شعاعی و مماسی نسبت به خورشید رفتار یک منحنی سینوسی با دوره تناوب π نشان می‌دهند و v_t و v_r به اندازه‌ی $\pi/۴$ اختلاف فاز دارند. این رفتار در رصدهای همسایگی خورشید مشاهده شده است. با برازش داده‌های ستارگان مختلف برای سرعت‌های $v_r(\ell)$ و $v_t(\ell)$ در فواصل برابر D می‌توان Aو B را تعیین نمود و با استفاده از خواص زیر

[۱۱] Jan Oort(1900-1992)

www.darkenergy.ir



شکل ۹.۱: یافتن فاصله با استفاده از نقطه‌ی همگرایی خوشه

$$\Omega_\circ = \frac{V_\circ}{R_\circ} = A - B, \quad \left(\frac{dV}{dR}\right)_{|R_\circ} = -(A+B) \tag{۸۲.۱}$$

می‌توان سرعت زاویه‌ی مدار خورشید و مشتق آن را حساب کرد و در نتیجه سینماتیک کهکشان در همسایگی خورشید را دریافت. مقادیر بدست آمده برای ثوابت اورت به قرار زیر است

$$A = ۱۴/۸ \pm ۰/۸(kms^{-۱}kpc^{-۱}), B = -۱۲/۴ \pm ۰/۶(kms^{-۱}kpc^{-۱}) \tag{۸۳.۱}$$

◄ **تمرین :** برای نواحی مرکزی کهکشان، می‌توان تقریبا جسم صلب در نظر گرفت. با فرض یک جسم صلب با چگالی یکنواخت، ثوابت اورت را برای ناحیه مرکزی کهکشان بدست آورید.

◄ **تمرین :** با فرض اینکه عمده جرم کهکشان در ناحیه مرکزی باشد و دیسک را بتوان به صورت حرکت کپلری تقریب زد، نشان دهید ثوابت اورت برای دیسک به صورت $A = \frac{۳V_\circ}{۴R_\circ}$ و $B = -\frac{V_\circ}{۴R_\circ}$ بدست می‌آید.

◄ **تمرین :** برای یک منحنی چرخش تخت ثوابت اورت چه خواهند شد؟

◄ **تمرین :** نشان دهید برای هر شعاع دلخواه در دیسک کهکشان چگالی می‌تواند با رابطه‌ی زیر محاسبه شود:

$$\rho(R) = \frac{B^۲ - A^۲}{۲\pi G}$$

۴.۵.۱ منحنی چرخش برای $R < R_\circ$

۵.۵.۱ منحنی چرخش برای $R > R_\circ$

۶.۵.۱ تعیین فاصله درون کهکشان با استفاده از اختلاف منظر خوشه‌ی متحرک

ستاره‌های درون یک خوشه‌ی (باز) از ستارگان همگی تقریبا سرعت فضایی یکسانی دارند. این بدان معناست که بردار سرعت خاصه‌ی آن‌ها مشابه است. گستردگی بازه‌ای که بردارهای سرعت خاصه هم‌راستا هستند بستگی به گستردگی زاویه‌ای خوشه‌ی ستاره‌ای روی کره دارد. شبیه به مسیر راه آهن که موازی هستند اما در فواصل دور به نظر موازی نمی‌رسند، بردارهای سرعت خاصه در یک خوشه‌ی ستاره‌ای نیز موازی به نظر نمی‌رسند و در فواصل دور به یک نقطه همگرا می‌شوند. با توجه به شکل ۹.۱ یک خوشه‌ی ستاره‌ای را فرض نمایید که همه‌ی ستاره‌های آن سرعت فضایی یکسان $\mathbf{v}$ دارند. مکان i—امین ستاره بر حسب تابعی از زمان می‌تواند نوشته شود

$$\mathbf{r}_i(t) = \mathbf{r}_i + \mathbf{v}t \tag{۸۴.۱}$$

اگر زمان حال را به عنوان مبداء زمان فرض کنیم، $\mathbf{r}_i$ بردار مکان فعلی ستاره است. جهت یک ستاره نسبت به ما با بردار

www.darkenergy.ir

یکه داده می‌شود

$$\mathbf{n}_i(t) := \frac{\mathbf{r}_i(t)}{|\mathbf{r}_i(t)|} \tag{۸۵.۱}$$

اگر در زمان‌های به اندازه‌ی کافی بزرگ $t \to \infty$ بردار جهت برای تمام ستاره‌های خوشه یکسان خواهد شد

$$\mathbf{n}_i(t) \to \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} =: \mathbf{n}_{conv} \tag{۸۶.۱}$$

در نتیجه در زمان‌های بزرگ به نظر می‌رسد تمام ستارگان خوشه به سمت نقطه‌ی همگرایی $\mathbf{n}_{conv}$ حرکت می‌کنند. این نقطه‌ی همگرایی فقط به بردار سرعت خوشه بستگی دارد. $\mathbf{n}_{conv}$ از روی راستای سرعت‌های خاصه ستاره‌های خوشه می‌تواند بدست آید یعنی کمیت $\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ تعیین می‌شود. از طرف دیگر یکی از مؤلفه‌های بردار سرعت $\mathbf{v}$ را می‌توان به راحتی از روی مؤلفه‌ی سرعت شعاعی v_r تعیین کرد. فرض کنیم ψ زاویه‌ی بین راستای خط دید $\mathbf{n}$ یک ستاره در خوشه و بردار سرعت $\mathbf{v}$ باشد. زاویه‌ی ψ مستقیما از روی بردار جهت $\mathbf{n}$ و نقطه‌ی همگرایی تعیین می‌شود $\cos\psi = \mathbf{n}.\mathbf{v}/|\mathbf{v}| = \mathbf{n}_{conv}.\mathbf{n}$. با توجه به $v \equiv |\mathbf{v}|$ مؤلفه‌های سرعت شعاعی و مماس بدست می‌آیند

$$v_r = v\cos\psi, \quad v_t = v\sin\psi \tag{۸۷.۱}$$

و از تقسیم دو رابطه داریم

$$v_t = v_t \tan\psi \tag{۸۸.۱}$$

این رابطه نشان می‌دهد که سرعت مماسی v_t بدون تعیین فاصله ستاره‌ها در خوشه می‌تواند اندازه گرفته شود. از طرفی رابطه‌ی زیر سرعت خاصه، فاصله و مؤلفه‌ی مماسی سرعت را به هم مربوط می‌کند

$$v_t = D\mu \quad \text{or} \quad \frac{v_t}{km/s} = ۴٫۷۴ \left(\frac{D}{۱pc}\right)\left(\frac{\mu}{۱''/yr}\right) \tag{۸۹.۱}$$

بنابراین، تعیین فاصله برای ستاره می‌شود

$$\mu = \frac{v_t}{D} = \frac{v_r \tan\psi}{D} \qquad \to \qquad D = \frac{v_r \tan\psi}{\mu} \tag{۹۰.۱}$$

این روش، تخمین فاصله‌های دقیقی برای خوشه‌های تا فاصله‌ی $۲۰۰pc \sim$ می‌دهد. دقت این روش وابسته به قابل اندازه‌گیری بودن سرعت‌های خاصه است. علاوه بر این، خوشه باید ناحیه به اندازه‌ی کافی بزرگی را در آسمان پوشش دهد تا نقطه‌ی همگرایی خوش تعریف باشد.

۷.۵.۱ مدارهای تقریبا دایره‌ای ستارگان

در بخش قبل فرض کردیم تمام ستاره‌ها در صفحه کهکشانی در مدارهای کاملا دایره‌ای در حال حرکت هستند. اما در واقعیت، ما انتظار نداریم اغلب ستاره‌ها در مدارهای کاملا دایره‌ای حرکت کنند، همان‌طور که سیارات منظومه شمسی در مدارهای دقیقا دایره‌ای حرکت نمی‌کنند. می‌دانیم یک سیاره در یک مسیر بیضی حرکت می‌کند، که مدار بسته‌ای در یک میدان گرانشی عکس مجذور فاصله از جرم مرکزی است. چون جرم کهکشان فقط در مرکز متمرکز نیست و در سراسر کهکشان توزیع شده است، انتظار داریم میدان گرانشی در کهکشان به صورت ساده‌ی عکس مجذوری رفتار نکند و مدارهای ستاره‌ای بیضی‌های ساده‌ای نباشند. در ادامه می‌خواهیم مدار یک ستاره را با فرض انحراف جزئی از مدار دایروی پید کنیم.

www.darkenergy.ir

فرض کنیم $V_{circ}(r)$ سرعت مورد نیاز یک ستاره برای حرکت در یک مدار دایره‌ای به شعاع r باشد. اگر f_r نیروی گرانشی در فاصله r باشد ، باید داشته باشیم

$$f_r = -\frac{V_{circ}^{۲}}{r} \tag{۹۱.۱}$$

$V_{\circ} = V_{circ}(R_{\circ})$ سرعت دایره‌ای خورشید در فاصله‌ی $R_{\circ}$ است که تقریبا همان سرعت LSR است. اگر یک ستاره اختلاف سرعت کوچکی با LSR داشته باشد، می‌توان مدار ستاره را با تعیین حرکاتش نسبت به LSR با استفاده از روش اختلالی تعیین کرد.

نظریه‌ي پیرا چرخه‌ای[۱۲]

یک ستاره که با سرعت $V_{\circ}$ در مدار دایره‌ای در فاصله‌ی $R_{\circ}$ در حرکت است را در نظر می‌گیریم. فرض کنید ستاره ناگهان یک لگد کوچک در راستای شعاعی دریافت می‌کند! از مکانیک کلاسیک می‌دانیم معادلات حرکت چنین وضعیتی به این صورت خواهد بود

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^{۲} = f_r, r^{۲}\dot{\theta} = \text{ثابت} \tag{۹۲.۱}$$

چون سرعت V در راستای θ با رابطه‌ی $V = r\dot{\theta}$ داده می‌شود، معادلات بالا را می‌توان به این صورت بازنویسی کرد

$$\ddot{r} = \frac{V^{۲}}{r} - \frac{V_{circ}^{۲}}{r}, \tag{۹۳.۱}$$

$$rV = R_{\circ}V_{\circ} \tag{۹۴.۱}$$

که سمت راست معادله‌ی ۹۳.۱ را با استفاده از معادله‌ی ۹۱.۱ نوشته‌ایم و در معادله‌ی بعدی نیز از پایستگی تکانه زاویه‌ای استفاده نمودیم.
حال فرض می‌کنیم که لگد وارد شده به صورت یک اختلال کوچک در شعاع نمایان شود

$$r = R_{\circ} + \xi = R_{\circ}\left(۱ + \frac{\xi}{R_{\circ}}\right), \quad \xi \ll R_{\circ} \tag{۹۵.۱}$$

از آن‌جایی که اختلال وارد شده بسیار کوچک است و ستاره از مدار دایره‌ای $r = R_{\circ}$ زیاد منحرف نخواهد شد، می‌توانیم از توان‌های مرتبه دو و بالاتر بر حسب ξ صرف‌نظر نماییم. جمله‌ی اول در سمت راست معادله‌ی ۹۳.۱ را می‌توان با استفاده از پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای ۹۴.۱ و اختلال شعاع ۹۵.۱ ساخت

$$\frac{V^{۲}}{r} = \frac{R_{\circ}^{۲}V_{\circ}^{۲}}{r^{۳}} = \frac{R_{\circ}^{۲}V_{\circ}^{۲}}{R_{\circ}^{۳}\left(۱ + \frac{\xi}{R_{\circ}}\right)^{۳}} \approx \frac{V_{\circ}^{۲}}{R_{\circ}}\left(۱ - ۳\frac{\xi}{R_{\circ}}\right) \tag{۹۶.۱}$$

برای جمله‌ی دوم سمت راست معادله‌ی ۹۳.۱ ، سرعت دایره‌ای را حول $R_{\circ}$ بسط می‌دهیم و از تعریف ثوابت اورت (معادلات ۸۱.۱) استفاده می‌کنیم

$$V_{circ}(r) \approx V_{circ}(R_{\circ}) + \left(\frac{dV}{dr}\right)_{R_{\circ}} \xi \approx V_{\circ} - (A+B)\xi \tag{۹۷.۱}$$

بنابراین خواهیم داشت

[۱۲] Epicycle theory

www.darkenergy.ir

$$\frac{V_{circ}^{۲}}{r} = \frac{V_{\circ}^{۲}\left[۱ - \frac{(A+B)}{V_{\circ}}\xi\right]^{۲}}{R_{\circ}\left(۱ + \frac{\xi}{R_{\circ}}\right)} \approx \frac{V_{\circ}^{۲}}{R_{\circ}}\left[۱ - \frac{۲(A+B)}{V_{\circ}}\xi - \frac{\xi}{R_{\circ}}\right] \tag{۹۸.۱}$$

از معادله‌ی ۹۵.۱ مشخص است که $\ddot{r} = \ddot{\xi}$ و با استفاده از ۹۶.۱ و ۹۸.۱ می‌توانیم معادله‌ی ۹۳.۱ را باز نویسی نماییم

$$\ddot{\xi} = ۲\frac{V_{\circ}}{R_{\circ}}(A+B)\xi - ۲\frac{V_{\circ}^{۲}}{R_{\circ}^{۲}}\xi \tag{۹۹.۱}$$

با استفاده از خاصیت ثوابت اورت $\frac{V_{\circ}}{R_{\circ}} = A - B$ رابطه‌ی ۹۹.۱ به رابطه‌ی زیر تبدیل می‌شود

$$\ddot{\xi} = ۴B(A-B)\xi \tag{۱۰۰.۱}$$

که ملاحظه می‌شود به معادله‌ی نوسان‌گر هماهنگ تبدیل می‌شود

$$\ddot{\xi} + \kappa^{۲}\xi = \circ \tag{۱۰۱.۱}$$

که بسامد پیرا چرخه‌ای یا بسامد نوسانات شعاعی تعریف می‌شود

$$\kappa = \sqrt{-۴B(A-B)} \tag{۱۰۲.۱}$$

این نتایج نشان می‌دهد که حرکت ستاره نسبت به مدار دایره‌ای $r = R_{\circ}$ یک حرکت نوسانی در راستای شعاعی است. سرعت شعاعی $\Pi = \dot{r}$ نیز باید رفتار نوسان‌گر هماهنگ نسبت به LSR داشته باشد و می‌تواند به صورت زیر نوشته شود

$$\Pi = \Pi_{\circ}\cos\kappa t \tag{۱۰۳.۱}$$

بنابراین معادله نوسان‌گر جابجایی با انتگرال‌گیری به صورت زیر باید باشد

$$\xi = \frac{\Pi_{\circ}}{\kappa}\sin\kappa t \tag{۱۰۴.۱}$$

حال به حرکت در راستای θ نگاهی بیاندازیم. از ثابت بودن تکانه زاویه‌ای می‌توان نوشت

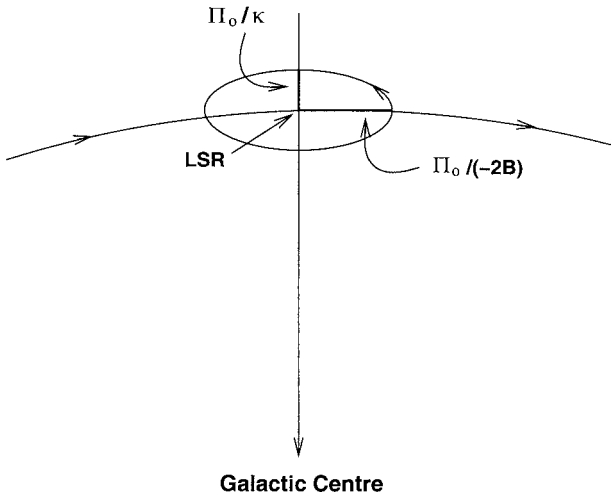
$$\dot{\theta} = \frac{R_{\circ}V_{\circ}}{r^{۲}} \approx \frac{V_{\circ}}{R_{\circ}}\left(۱ - \frac{۲\xi}{R_{\circ}}\right) \tag{۱۰۵.۱}$$

اولین جمله سمت راست $V_{\circ}/R_{\circ}$ متناظر با حرکت LSR است، و جمله‌ی دوم حرکت ستاره نسبت به LSR را می‌دهد

$$\Delta\dot{\theta} = -\frac{۲V_{\circ}\xi}{R_{\circ}^{۲}} \tag{۱۰۶.۱}$$

این سرعت زاویه‌ای به صورت سرعت خطی در می‌آید که تا مرتبه اول بر حسب ξ و با جایگذاری معادله‌ی ۱۰۴.۱ می‌شود نوشت

www.darkenergy.ir



شکل ۱۰.۱: حرکت پیرا چرخه‌ای حول LSR

$$\Delta V = (R_\circ + \xi)\Delta\dot{\theta} = -\frac{۲V_\circ\xi}{R_\circ} = -\frac{۲\Pi_\circ V_\circ}{\kappa R_\circ}\sin\kappa t \qquad (۱۰۷.۱)$$

جابجایی متناظر با این سرعت خطی با انتگرال‌گیری بدست می‌آید

$$\eta = \frac{۲\Pi_\circ V_\circ}{\kappa^۲ R_\circ}\cos\kappa t \qquad (۱۰۸.۱)$$

از تعریف ثوابت اورت ۸۱.۱ و معادله‌ی ۱۰۲.۱ بدست می‌آید

$$\frac{V_\circ}{\kappa^۲ R_\circ} = \frac{(A-B)}{-۴B(A-B)} = -\frac{۱}{۴B}$$

و جابجایی ناشی از سرعت زاویه‌ای می‌شود

$$\eta = -\frac{\Pi_\circ}{۲B}\cos\kappa t \qquad (۱۰۹.۱)$$

از معادلات ۱۰۴.۱ و ۱۰۹.۱ مشخص است که حرکت ستاره نسبت به LSR یک مسیر بیضی است، در حالی که خود LSR حول مرکز کهکشان در حال گردش است (به شکل ۱۰.۱ دقت نمایید). منجمان یونان باستان هیپارخوس[۱۳] و بطلمیوس[۱۴] در نظریه‌ی زمین مرکزی‌شان چنین حرکت مشابهی را برای سیارات توصیف کرده‌اند و حرکت پیرا چرخه‌ای[۱۵] نامیده‌اند. مسیر بیضوی یک ستاره نسبت به LSR را پیرا چرخه می‌نامیم.

از معادلات ۱۰۴.۱ و ۱۰۹.۱ و ۱۰۲.۱ نسبت طول نیم‌قطر اصلی (در راستای θ) به نیم‌قطر فرعی (در راستای r) بدست می‌آید

[۱۳] Hipparchus (190 BC-120 BC)
[۱۴] Claudius Ptolemy (90 AD-168 AD)
[۱۵] Epicyclic

www.darkenergy.ir

$$\frac{\Pi_\circ/۲|B|}{\Pi_\circ/\kappa} = \sqrt{\frac{A-B}{|B|}} \tag{۱۱۰.۱}$$

نسبت دوره تناوب نوسانات حول LSR به تناوب چرخش حول مرکز کهکشان هست

$$\frac{P_{ocs}}{P_{rev}} = \frac{۲\pi/\kappa}{۲\pi R_\circ/V_\circ} = \frac{A-B}{\sqrt{-۴B(A-B)}} = \frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{A-B}{-B}} \tag{۱۱۱.۱}$$

اگر مقادیر گزارش شده برای ثوابت اورت را جای‌گذاری نماییم این نسبت حدود ۰٫۷ خواهد شد که نشان می‌دهد مدار ستاره بسته نخواهد بود.

۸.۵.۱ مدارهای ستاره‌ها در پتانسیل‌های با تقارن محوری

مدار کلی ستاره‌ها در یک کهکشان بطور عمده به بخش هموار شده میدان گرانشی که روی منطقه‌ی وسیعی از ستارگان متوسط گرفته شده است،وابسته است. در این بخش می‌خواهیم به بررسی مدار ستاره‌ها در کهکشان‌هایی با پتانسیل هموار با تقارن محوری بپردازیم. در یک دستگاه استوانه‌ای کهکشان مرکزی (R,ϕ,z) صفحه میانی کهکشان در $z=\circ$ و مرکز در $R=\circ$ هستند. پتانسیل با تقارن محوری مستقل از سمت زاویه‌ای ϕ است و $\partial\Phi/\partial\phi=\circ$ و در نتیجه نیرویی در راستای ϕ نداریم؛ بنابراین تکانه زاویه‌ای در راستای z پایسته است.

$$\frac{d}{dt}(R^۲\dot{\phi}) = \circ \rightarrow L_z \equiv R^۲\dot{\phi} = \text{ثابت} \tag{۱۱۲.۱}$$

و چون پتانسیل با زمان تغییر نمی‌کند پس $\Phi=\Phi(R,z)$. می‌توانیم معادله‌ی حرکت را در راستای شعاعی بنویسیم

$$\ddot{R} = R\dot{\phi}^۲ - \frac{\partial\Phi}{\partial R} = -\frac{\partial\Phi_{eff}}{\partial R}, \quad \Phi_{eff} \equiv \Phi(R,z) + \frac{L_z^۲}{۲R^۲} \tag{۱۱۳.۱}$$

با ضرب کردن $\dot{R}$ در طرف معادله‌ی قبل و انتگرال‌گیری برای ستاره‌ای در صفحه میانی کهکشان $z=\circ$ داریم

$$\frac{۱}{۲}\dot{R}^۲ + \Phi_{eff}(R, z=\circ; L_z) = \text{مقدار ثابت} \tag{۱۱۴.۱}$$

معادله‌ی حرکت عمودی ستاره نیز به این صورت است

$$\ddot{z} = -\frac{\partial\Phi}{\partial z}(R,z) = -\frac{\partial\Phi_{eff}(R,z)}{\partial z} \tag{۱۱۵.۱}$$

اگر نیمه‌های بالا و پایین دیسک تصاویر آیینه‌ای هم باشند، $\Phi(R,z)=\Phi(R,-z)$ و در نتیجه در صفحه‌ی $z=\circ$ نیروی عمودی صفر خواهد بود. R_g شعاع مرکز هادی[۱۶] شعاعی است که پتانسیل مؤثر در آن‌جا کمینه مقدار را دارد و شعاع مدار دایره‌ای است. پتانسیل $\Phi(R,z)$ را حول نقطه‌ی $(R_G,\circ)$ بسط تیلور می‌نویسیم

$$\ddot{z} \approx -z\left[\frac{\partial^۲\Phi(R_g,z)}{\partial z^۲}\right]_{z=\circ} \equiv -\nu^۲(R_g)z \tag{۱۱۶.۱}$$

که این معادله‌ی یک نوسان‌گر هماهنگ در راستای عمود بر صفحه‌ی کهکشان است.

[۱۶] Guiding-center radius

www.darkenergy.ir

۹.۵.۱ مدارهای تقریبا دایره‌ای: تقریب پیرا چرخه‌ای

در اغلب پتانسیل‌های با تقارن محوری، ما به مسیرهای تقریبا دایره‌ای از ستارگان با بسامد مداری متوسطِ $\Omega(R)$ علاقمندیم. چنین مدار دایره‌ای به عنوان یک مرکز هادی برای مدار مختل شده عمل می‌کند. در همسایگی شعاع مرکز هادی R_g و صفحه میان کهکشانی $z=0$ پتانسیل مؤثر را بسط می‌دهیم

$$\Phi_{eff} \approx \Phi(R_g,0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\Phi_{eff}}{\partial R^2}\right)_{R_g,0} x^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\Phi_{eff}}{\partial z^2}\right)_{(R_g,0)} z^2 \qquad (۱۱۷.۱)$$

در این بخش فقط حرکت در صفحه را بررسی می‌کنیم و $z=0$ در نظر می‌گیریم. x را در راستای شعاعی و y را در راستای چرخش در نظر می‌گیریم. نوسانات کوچک x با معادله حرکت نوسان‌گر توصیف می‌شود

$$\ddot{x} + \kappa^2 x = 0, \qquad \kappa^2 \equiv \left(\frac{\partial^2\Phi_{eff}}{\partial R^2}\right)_{(R_g,0)} \qquad (۱۱۸.۱)$$

فرکانس پیرا چرخه‌ای κ را می‌توان به صورت زیر باز کرد

$$\kappa^2 = \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial R^2}\right)_{R_g} + \frac{3L_z^2}{R_g^4} = \left(R\frac{d}{dR}\Omega^2 + 4\Omega^2\right)_{R_g} \qquad (۱۱۹.۱)$$

به خاطر داریم که از رابطه‌ی نیرو و پتانسیل، سرعت دورانی بدست می‌آید

$$\frac{v^2}{r} = \frac{d\Phi}{dr} \qquad (۱۲۰.۱)$$

بنابراین رابطه‌ی بسامد چرخشی با تکانه زاویه‌ای خواهد بود

$$\Omega^2 = \frac{1}{R}\frac{\partial\Phi}{\partial R} = \frac{L_z^2}{R^4} \qquad (۱۲۱.۱)$$

جواب معادله‌ی دیفرانسیل ۱۱۸.۱ به صورت زیر است

$$x(t) = X\cos(\kappa t + \psi) \qquad (۱۲۲.۱)$$

که ψ زاویه‌ی فاز است که با استفاده از شرایط اولیه تعیین می‌شود.
برای بررسی حرکت در راستای ϕ همزمان با نوسان ستاره در راستای شعاعی، می‌توانیم مکان زاویه‌یا جسم را با استفاده از پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای و کوچک فرض کردن $x = R - R_g \ll R_g$ بدست آورد

$$\dot{\phi} = \frac{L_z}{R^2} = \frac{L_z}{R_g^2\left(1+\frac{x}{R_g}\right)^2} \approx \Omega_g\left(1 - \frac{2x}{R_g}\right) \qquad (۱۲۳.۱)$$

از این رابطه انتگرال می‌گیریم

$$\phi(t) = \Omega_g t + \phi_0 - \frac{2\Omega_g}{\kappa R_g} X\sin(\kappa t + \psi) \qquad (۱۲۴.۱)$$

y را به عنوان فاصله تا مدار دایره‌ی هادی در راستای زاویه‌ای تعریف می‌نماییم

$$y \equiv R_g(\phi - \phi_g) = -\frac{2\Omega_g}{\kappa} X\sin(\kappa t + \psi) = Y\sin(\kappa t + \psi), \qquad \phi_g = \Omega_g t + \phi_0 \qquad (۱۲۵.۱)$$

www.darkenergy.ir

همچنان که مختصه‌های x و y با بسامد یکسان κ نوسان می‌کنند، مسیر جسم یک بیضی را دنبال می‌کند که پیرا چرخه (چرخزاد) حول مرکز دایره‌ی هادی نامیده می‌شود.

◄ **تمرین:** نشان دهید رابطه‌ی زیر برقرار است

$$\frac{۱}{۲} < \frac{X}{Y} = \frac{\kappa}{۲\Omega_g} < ۱ \qquad (۱۲۶.۱)$$

که حد پایین (۱/۲) متناظر با حرکت در پتانسیل کپلری و حد بالا (۱) متناظر با حرکت نوسان‌گر هماهنگ است.

◄ **تمرین:** نشان دهید با متوسط‌گیری روی کل یک پیرا چرخه ($۰ \leq \kappa t \leq ۲\pi$) خواهیم داشت

$$\frac{\langle \dot{y}^۲ \rangle_{orbit}}{\langle \dot{x}^۲ \rangle_{orbit}} = \frac{۴\Omega_g^۲}{\kappa^۲} \qquad (۱۲۷.۱)$$

◄ **تمرین:** اگر این بار روی یک حجم از فضا شامل تعداد زیادی مدار ستاره‌ای متوسط‌گیری نماییم نشان دهید داریم

$$\frac{\langle \dot{y}^۲ \rangle_{vol}}{\langle \dot{x}^۲ \rangle_{vol}} = \frac{\kappa^۲}{۴\Omega_g^۲} \qquad (۱۲۸.۱)$$

۱۰.۵.۱ مدارهای ستاره‌ای در پتانسیل‌های با تقارن کروی

- پتانسیل هماهنگ: این پتانسیل مثل یک نوسان‌گر هماهنگ متقارن کروی ، مدارهای بیضوی بسته که مرکزشان در مبداء است می‌دهد

$$\Phi(r) = \frac{۱}{۲}\Omega^۲ r^۲ \qquad (۱۲۹.۱)$$

- پتانسیل کپلری: پتانسیل یک جرم نقطه‌ای

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r} \qquad (۱۳۰.۱)$$

اگر این پتانسیل را در معادله حرکت استفاده نماییم می‌دهد

$$\frac{d^۲u}{d\Psi^۲} + u = \frac{GM}{L^۲} \qquad (۱۳۱.۱)$$

که جواب این معادله نوسان‌گر هماهنگ می‌شود

$$u = A\cos(\psi - \psi_۰) + \frac{GM}{L^۲} \qquad (۱۳۲.۱)$$

که با مرتب کردن جواب بر حسب r معادله‌ی مکان بدست می‌آید

$$r = \frac{a(۱-e^۲)}{۱ + e\cos(\psi - \psi_۰)}, \qquad a \equiv \frac{L^۲}{GM(۱-e^۲)} \qquad (۱۳۳.۱)$$

که e خروج از مرکز مدار است. در معادله بالا سه ثابت $a, e, \psi_۰$ باقی مانده است اما دو ثابت دیگر نیز پنهان مانده‌اند، زوایایی که جهت‌گیری صفحه مداری را مشخص می‌نمایند. بنابراین مدار جسم یک مکان هندسی یک بعدی در فضای فاز ۶ بعدی را دنبال می‌کند. چنین ثابت‌هایی که ابعاد فضای فاز را تقلیل می‌دهند را انتگرال‌های حرکت می‌نامیم.

www.darkenergy.ir

- پتانسیل کپلری پسا-نیوتنی:

پایین‌ترین مرتبه‌ی اثرات نسبیت عام را می‌توان با اضافه کردن یک تصحیح پسا-نیوتنی به پتانسیل نیوتنی تقریب زد

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r}\left(1 + \frac{k}{r}\right), \qquad k = \frac{2GM}{c^2} \tag{۱۳۴.۱}$$

با جای‌گذاری این پتانسیل در معادله‌ی کلی حرکت بدست می‌آوریم

$$\frac{d^2u}{d\psi^2} + u\left(1 - \frac{2GMk}{L^2}\right) = \frac{GM}{L^2} \tag{۱۳۵.۱}$$

این جواب هم یک معادله‌ی حرکت یک نوسان‌گر هماهنگ در راستای شعاعی می‌دهد، با این تفاوت که بسامد نوسانات شعاعی دیگر مقدار واحد نیست. در این پتانسیل نوسانات شعاعی و سمتی، دوره تناوب‌های متفاوتی دارند، و مدارها دیگر بیضی‌های بسته نیستند و حضیض تقدیم می‌کند. یکی از موفقیت‌های اولیه نظریه‌ی نسبیت عام توصیف موفق حرکت تقدیمی حضیض مدار عطارد بود. به ازای مقادیر بزرگ k مدار این پتانسیل شبیه گل رز می‌شود.

- پتانسیل ویتا- پاچینسکی

پتانسیل ویتا-پاچینسکی[۱۷] به صورت تابعی از شعاع به صورت زیر است

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r - \frac{2GM}{c^2 r}} \tag{۱۳۶.۱}$$

که در فواصل دور به تقریب پسا-نیوتنی تقلیل می‌یابد. این پتانسیل ویژگی داشتن داخلی‌ترین مدار دایره‌ای پایدار (ISCO) دارد که با داخلی‌ترین مدار پایدار یک سیاه‌چاله شوارتزشیلد منطبق است. همچنین این پتانسیل به عنوان یک تقریب نیوتنی برای دیسک‌های برافزایشی بدون استفاده از نسبیت عام نیز به کار می‌رود.

◄ **تمرین:** برای هر یک از پتانسیل‌های بالا که دارای حل تحلیلی هستند، نمودار پتانسیل مؤثر را رسم کرده، سپس معادله مسیر را بیابید و دوره تناوب حرکت مداری در این پتانسیل‌ها را حساب کنید.

۶.۱ معادلات جینز

معادلات جینز چگالی تعداد، سرعت‌های متوسط، سرعت‌های پخش و پتانسیل گرانشی را در سیستم‌های کهکشانی مرتبط می‌کنند. می‌خواهیم معادلاتی برای کمیت‌های زیر بدست آوریم:

$$\begin{aligned} n &= \int f d^3v \\ n\langle v_i\rangle &= \int v_i f d^3v \\ n\sigma_{ij}^2 &= \int (v_i - \langle v_i\rangle)(v_j - \langle v_j\rangle) f d^3v \end{aligned} \tag{۱۳۷.۱}$$

σ_{ij} تانسور سرعت پخشی است که بعد به آن خواهیم پرداخت. با محاسبه‌ی ممان‌های معادله‌ی بولتزمان غیر برخوردی می‌توانیم معادلات جینز را بدست آوریم. معادله بولتزمان به صورت زیر است

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{dx_i}{dt}\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{dv_i}{dt}\frac{\partial f}{\partial v_i}\right) = 0 \tag{۱۳۸.۱}$$

[۱۷] Witta-Paczynski

www.darkenergy.ir

یا با جایگزینی $dv/dt = -\nabla\Phi$ به صورت معادل بر حسب پتانسیل گرانشی

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial v_i} = 0 \qquad (۱۳۹.۱)$$

برای بدست آوردن اولین معادله‌ی جینز، باید ممان صفر را با انتگرال‌گیری این معادله روی همه سرعت‌ها بدست آوریم

$$\int \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial v_i} \right) d^3v = \int 0 . d^3v \qquad (۱۴۰.۱)$$

$$\int \frac{\partial f}{\partial t} d^3v + \sum_{i=1}^{3} \int v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} d^3v - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial v_i} d^3v = 0 \qquad (۱۴۱.۱)$$

www.darkenergy.ir