به نام خداوند مهربان

جزوه‌ی آموزش نجوم کروی

سیدامیر سادات‌موسوی

این جزوه‌ی آموزشی را برای کتابی با نام گنجینه‌ی المپیاد نجوم نوشته بودم، با توجه به اینکه تهیه‌ی این کتاب سخت است، با انتشارات آن صحبت کردم و به من اجازه دادند که متن را در اختیار علاقه‌مندان قرار بدهم.

انتشار و پخش این جزوه، بدون بهره‌برداری مالی و مادی آزاد است. لطفاً این جزوه را به دست علاقه‌مندان به المپیاد نجوم برسانید.

سیدامیر سادات‌موسوی

B3amirb@gmail.com

۱۳۹۵

فصل سوم

نجــوم کــروی

دیدگاه

نوشتن در موردِ نجوم کروی، موضوعِ تازه‌ای نیست. بحث در موردِ کره‌ی آسمان است که به نخستین نگاه‌های بشر به آسمان بر می‌گردد و روابطی که در اینجا به‌کار می‌رود، بعضی حتی از زمانِ بطلمیوس هم شناخته شده بوده‌اند.

دانشمندانِ مسلمان تقریباً از همان قرونِ اولِ اسلامی نگاهِ ویژه‌ای به مثلثاتِ کروی داشته‌اند و کتاب‌ها و ابزار آلاتِ بسیاری را در زمینه‌های مختلفِ این حیطه به یادگار گذاشته‌اند. علتِ ویژه بودنِ این نگاه، احتمالاً به بعضی از احکامِ اسلامی مانند قبله و اوقاتِ شرعی بر می‌گردد که ضرورتِ پرداختن به مثلثاتِ کروی را از همان ابتدا بوجود آورده بود.

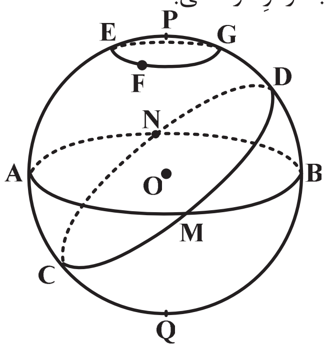
نگاهی که در این فصل ما به مثلثاتِ کروی داریم، بسیار نتیجه محور است، بنابراین وقتِ زیادی را صرفِ جنبه‌های هندسیِ کره نمی‌کنیم و حتی بعضی از روابطِ موردِ نیاز را بدونِ توضیحِ بسیار بیان می‌کنیم. آنچه که برای این فصل در نگاهِ ما بیش‌تر اهمیت دارد، وارد شدن به حیطه‌هایی است که در المپیاد نجوم موردِ توجه قرار می‌گیرد. صفحاتِ آغازینِ این فصل مربوط به مثلثاتِ کروی و روابطِ بینِ اجزایِ مثلث‌های کروی است. سپس با معرفیِ چند دستگاهِ مختصاتِ کروی بحث ادامه یافته است. در تمامِ طولِ فصل از روابطِ مثلثاتِ کروی استفاده شده، و سعی بر این بوده است که به مطالبی بیش‌تر پرداخته شود که در کتبِ قابلِ دسترسِ دیگر کم‌تر دیده می‌شود.

دایره‌ها بر روی کره

شما قطعاً تا کنون با مفهومِ مثلث‌های مسطح به خوبی آشنا بوده‌اید. هر مثلثِ مسطح از تقاطعِ سه خطِ راست پدید می‌آید. آنچه اکنون می‌خواهیم به آن بپردازیم، مثلث‌های کروی هستند. مثلث‌های کروی، مثلث‌هایی‌اند که بر رویِ یک کره رسم می‌شوند. ناخودآگاه این سئوال به ذهن می‌آید که اضلاعِ مثلث‌های روی کره را چگونه می‌خواهیم رسم کنیم. برایِ تبیینِ این موضوع لازم است ابتدا تقسیم‌بندی‌ای میانِ دوایری که رویِ کره رسم می‌شوند داشته باشیم.

بدیهی است که ما می‌توانیم بی‌نهایت دایره بر رویِ سطحِ یک کره رسم کنیم، هر یک از این دوایر شعاعی کوچکتر و یا مساوی با شعاعِ کره دارند به دوایری که شعاعی برابر با شعاعِ کره دارند، دایره عظیمه می‌گوییم. مرکزِ یک دایره عظیمه همان مرکزِ کره است. دایره‌هایی که شعاعی کوچکتر از شعاعِ کره دارند را دایره صغیره می‌نامیم. واضح است که مرکزِ این دایره‌ها دیگر منطبق با مرکزِ کره نمی‌باشد.

هر دایره‌ای که بر رویِ سطحِ یک کره رسم می‌شود را می‌توان حاصلِ تقاطعِ یک صفحه و یک کره در نظر گرفت، اگر صفحه‌ی موردِ نظرِ ما از مرکزِ کره عبور کند، نتیجه‌ی تقاطع یک دایره عظیمه می‌شود و اگر از مرکزِ کره عبور نکند، نتیجه یک دایره صغیره خواهد شد. در شکلِ زیر دایره‌های $ANBM$، $CNDM$ و $APBQ$ همه دایره عظیمه هستند و EFG یک دایره صغیره است.

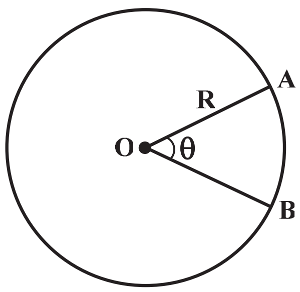


شکل ۱-۳

طولِ کمان

مقیاسِ رادیان در اندازه‌ی زوایا به گونه‌ای تعریف شده است که طولِ کمانِ روبه‌روی یک زاویه در دایره‌ای با شعاعِ واحد، با اندازه‌ی همان زاویه بر حسبِ رادیان برابر باشد. بنابراین در هر دایره‌ی دلخواه با شعاعِ R طولِ کمانِ روبه‌روی زاویه‌ی θ (بر حسبِ رادیان) با $R\theta$ برابر خواهد بود.

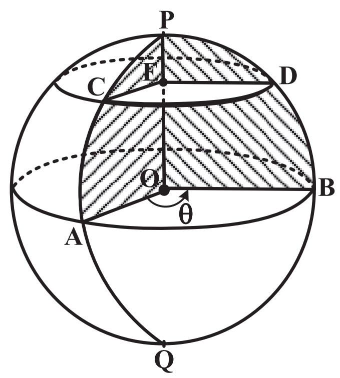
$$\widehat{AB} = R\theta$$



شکل ۱-۳

حالا به شکلِ زیر نگاه کنید. در این شکل کمانِ $\widehat{CD}$ بخشی از دایره صغیره‌ای است که موازی با دایره عظیمه‌ی گذرنده از $\widehat{AB}$ رسم شده است.

نقطه‌ی O مرکزِ دایره عظیمه و نقطه‌ی E مرکزِ دایره صغیره است.



شکل ۳-۳

دقت کنید که $C\hat{E}D$ و $A\hat{O}B$ هر دو با هم برابراند امّا طولِ کمانِ $\widehat{AB}$ و $\widehat{CD}$ با هم برابر نیست. این موضوع چیزی است که بسیار باید به آن توجه کنید، کمان‌های روبروی زوایای برابر، الزاماً طولی یکسان ندارند، بلکه شعاعِ دایره هم در اندازه‌ی طولِ یک کمان مؤثر است.

$$C\hat{E}D = A\hat{O}B = \theta \quad \text{(بر حسبِ رادیان)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{AB} = \overline{OA} \times A\hat{O}B = \overline{OA} \times \theta \\ \widehat{CD} = \overline{CE} \times C\hat{E}D = \overline{CE} \times \theta \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{برهم تقسیم می کنیم}} \frac{\widehat{AB}}{\widehat{CD}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{CE}}$$

از آنجایی که $\overline{OA}$ شعاعِ دایره عظیمه است، پس با شعاعِ کره برابر است. بنابراین:

$$\overline{OA} = \overline{OC}$$

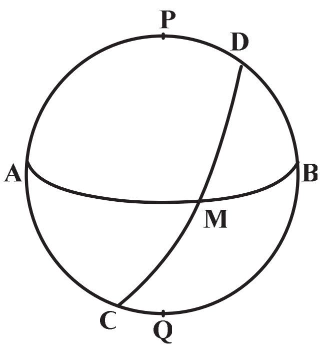
$$\cos C\hat{O}A = \sin C\hat{O}P = \frac{\overline{CE}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{OA}}$$

$$\Rightarrow \frac{\widehat{AB}}{\widehat{CD}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{CE}} = \frac{1}{Cos\, C\hat{O}A} \Rightarrow \widehat{CD} = \widehat{AB}\, Cos\, C\hat{O}A$$

و اگر $C\hat{O}A$ را با ϕ نمایش دهیم:

$$\widehat{CD} = \widehat{AB}\, Cos\, \phi \qquad \text{رابطه (۱-۳)}$$

در روابطِ بالا $\widehat{AB}$ یا $\widehat{CD}$ به ترتیب طولِ کمان‌های $\widehat{AB}$ و $\widehat{CD}$ را نشان می‌دهد. از آنجایی که پس از این زیاد با طولِ کمان سر و کار نخواهیم داشت، دیگر هر وقت کمانی را مشخص کردیم، منظورِمان زاویه‌ی آن خواهد بود.



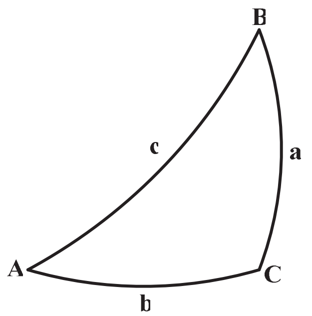
شکل ۴-۳

مثلث کروی

با توجه به اینکه حالا دیگر دایره‌های روی کره را به خوبی می‌شناسیم، می‌توانیم مثلثِ کروی را تعریف کنیم. به شکلِ حاصل از تقاطعِ سه دایره عظیمه، یک مثلثِ کروی می‌گوییم به شرطی که آن سه دایره عظیمه، دو به دو همدیگر را در بیش از دو نقطه قطع نکنند. در واقع با هر سه نقطه بر روی سطحِ کره می‌توان یک مثلثِ کروی ساخت به شرطِ اینکه آن سه نقطه بر رویِ یک دایره عظیمه نباشند. در شکلِ زیر سه دایره عظیمه را مشاهده می‌کنید. مثلث‌های MDB ، AMC ، ADM و CMB همه مثلث‌های کروی هستند.

اگر در شکلِ بالا به عنوانِ مثال به مثلثِ کرویِ MDB نگاه کنید، متوجه می‌شوید که برایِ این مثلث هم، مانندِ مثلث‌های مسطح می‌توانیم ۳ ضلع و ۳ زاویه در نظر بگیریم.

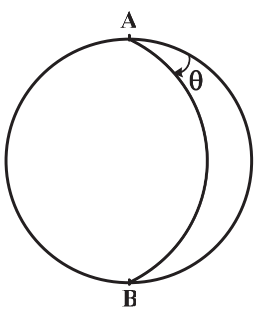
مثلاً ضلعِ $\widehat{DB}$ را با مقدارِ زاویه‌ی این کمان مشخص می‌کنیم و زاویه‌ی $M\hat{D}B$ را مقدارِ زاویه‌ی بینِ مماس‌های $\widehat{MD}$ و $\widehat{DB}$ در نقطه‌ی D در نظر می‌گیریم.



شکل ۵-۳

مساحتِ مثلثِ کروی

مثلثِ کروی زیر را در نظر بگیرید. می‌خواهیم مساحتِ این مثلث را بر حسبِ اضلاع و زوایا اش به‌دست آوریم. دقت کنید که حروفِ بزرگ نشان دهنده‌ی زوایا و حروفِ کوچک نشان دهنده‌ی اضلاع هستند.



شکل ۶-۳

می‌دانیم که مساحت سطح یک کره، به شعاع R ، $4\pi R^2$ است.

در شکل زیر قاچی از کره را مشاهده می‌کنید.

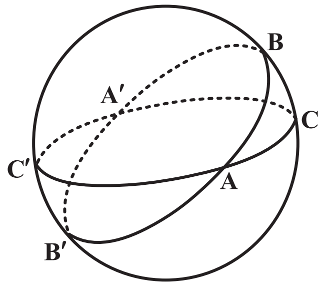
قاچ شکل بالا در بین دو نیم دایره عظیمه تشکیل شده است که با هم زاویه‌ی θ می‌سازند. مساحت این قاچ را با S_θ نمایش می‌دهیم.

$$\frac{S_\theta}{S_\pi} = \frac{\theta}{\pi} \Rightarrow S_\theta = \frac{\theta}{\pi} S_\pi$$

منظورمان از S_π در واقع یک نیم کره است که مساحت آن $2\pi R^2$ است.

$$\Rightarrow S_\theta = \frac{\theta}{\pi} \times 2\pi R^2 = 2\theta R^2$$ رابطه (۲-۳)

حالا به شکل زیر توجه کنید. می‌خواهیم در این شکل مساحت مثلث کروی ABC را به‌دست آوریم. در ضمن می‌دانیم که در پشت کره، مثلث $A'B'C'$ همنهشت با این مثلث وجود دارد که تمام اجزایش با مثلث ABC برابر است.



شکل ۷-۳

حالا مساحت سه قاچ از این کره را با هم جمع می‌کنیم.

۱ ـ مساحت قاچی که از نیم‌دایره‌ی عظیمه‌ی $\widehat{C'BC}$ و $\widehat{C'AC}$ پدید می‌آید = S_C

۲ ـ مساحت قاچی که از نیم‌دایره‌ی عظیمه‌ی $\widehat{B'AB}$ و $\widehat{B'CB}$ پدید می‌آید = S_B

۳ ـ مساحت قاچی که از نیم‌دایره‌ی عظیمه‌ی $\widehat{AC'A'}$ و $\widehat{AB'A'}$ پدید می‌آید = S_A

در شکل ۷-۳ مشخص است که مجموع این قاچ‌ها در نهایت برابر با مساحتِ یک نیم‌کره بعلاوه‌ی مساحت مثلث کروی ABC و مساحت مثلث کروی $A'B'C'$ می‌شود:
$$S_A + S_B + S_C = 2\pi R^2 + S_{ABC} + S_{A'B'C'}$$

می‌دانیم که مساحت $A'B'C'$ برابربرست با مساحت ABC در ضمن پیش از این دیده بودیم که مساحت قاچ روبه‌روی زاویه‌ی θ برابربرست با $2\theta R^2$.

$$\Rightarrow S_A + S_B + S_C = 2AR^2 + 2BR^2 + 2CR^2 = 2\pi R^2 + 2S_{ABC}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = (A + B + C - \pi)R^2$$ رابطه (۳-۳)

باید توجه داشته باشیم که در این رابطه A، B و C بر حسب رادیان هستند.

روابط بین اجزای مثلث‌های کروی

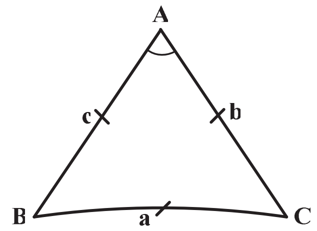
همان‌طور که می‌دانیم در مثلث‌های مسطح میان اجزای مثلث روابطی وجود دارد که مثلاً با داشتنِ دو ضلع و زاویه‌ی بین‌شان، می‌توانیم ضلع دیگر را به‌دست آوریم. در مثلث‌های کروی هم، وضع به همین شکل است و روابطی میان اضلاع و زوایای یک مثلث کروی وجود دارد.

در اینجا ما ابتدا چند رابطه‌ی مهم و ضروری را بررسی می‌کنیم و سپس به اثبات یکی از آن‌ها اکتفا می‌کنیم.

رابطه‌ی زیر که به «رابطه‌ی کسینوس» مشهور است، رابطه‌ی بین سه ضلع و یک زاویه را مشخص می‌کند.

$$Cos\, a = Cos b\, Cos\, c + Sin\, b\, Sin\, c\, Cos\, A$$ رابطه (۴-۳)

در شکل زیر اجزای به‌کار رفته در این رابطه را مشاهده می‌کنید.



شکل ۸-۳

اگر در یک مثلث کروی، اضلاع مشخص باشند، بوسیله‌ی رابطه‌ی کسینوس می‌توانیم، زوایا را به‌دست آوریم.

البته مشخص است که این رابطه را می‌توان به دو شکلِ زیر هم نوشت:

$$Cos\, b = Cos\, c\, Cos\, a + Sin\, c\, Sin\, a\, Cos\, B$$

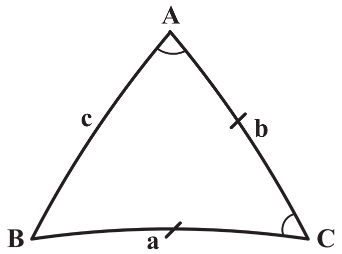
$$Cos\, c = Cos\, a\, Cos\, b + Sin\, a\, Sin\, b\, Cos\, C$$

اگر در مثلثی مانند شکلِ ۸-۵، A و c، b را داشته باشیم. می‌توانیم بوسیله‌ی رابطه‌ی کسینوس a و آنگاه B و C را بیابیم.

رابطه‌ی دیگری که قطعاً به دردمان می‌خورد، رابطه‌ی زیر است. این رابطه که به « رابطه‌ی چهار جزئی » مشهور است، همان‌طور که از نامش بر می‌آید ارتباط بین چهار جزء از یک مثلث کروی را نشان می‌دهد:

$$Cos\, b\, Cos\, C = Sin\, b\;\; Cot\, a - Sin\, C\, Cot\, A$$ رابطه (۵-۳)

در شکل زیر مشخص است که اجزای بکار رفته در این رابطه، چهار جزء پشت سر هم از یک مثلث کروی هستند.



شکل ۹-۳

با بیانِ زیر می‌توانید رابطه‌ی چهار جزئی را ساده‌تر به خاطر بسپارید:

(کتانژانت زاویه کناری × سینوس زاویه‌ی میانی) ـ (کتانژانت ضلع کناری × سینوس ضلع میانی) = کسینوس زاویه‌ی میانی × کسینوس ضلع میانی

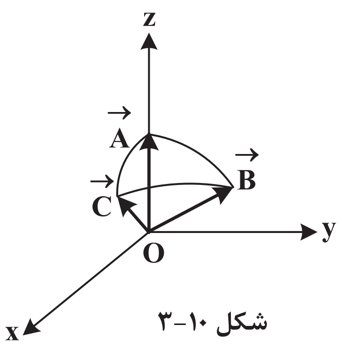
رابطه‌ی دیگری که مورد استفاده‌ی ما قرار خواهد گرفت، « رابطه‌ی سینوس » است. دانشمندان دوره‌ی اسلامی این رابطه را «شکل مغنی» و یا « قانون الهیئة » می‌نامیده‌اند که به شکل زیر است:

$$\frac{Sin\, a}{Sin\, A} = \frac{Sin\, b}{Sin\, B} = \frac{Sin\, c}{Sin\, C}$$ رابطه (۶-۳)

ابونصر عراق، بوزجانی، خجندی و کوشیار گیلانی که دانشمندان هم عصر بوده‌اند، مدعی کشف این رابطه هستند. ابوریحان بیرونی در کتابی به نام « مقالید علم‌الهیئة » بصورت مفصل در این خصوص بحث کرده است و حق تقدم در اثبات این رابطه را به استاد خود ابونصر عراق داده است.

اثبات رابطه‌ی کسینوس

برای دیدن اثبات هندسی روابط مثلثات کروی، می‌توانید به کتاب « نجوم کروی » نوشته‌ی و. م. اسمارت رجوع کنید. ما در اینجا تنها به اثبات برداری رابطه‌ی کسینوس اکتفا می‌کنیم.

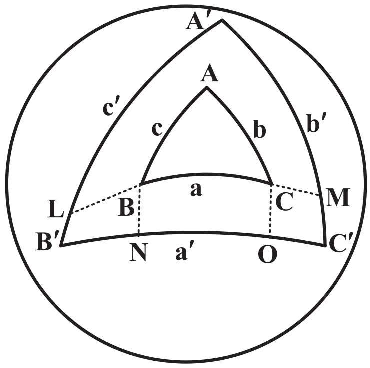


شکل ۱۰-۳

یک مثلث کروی دلخواه در نظر بگیرید. بردارهـای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ بردارهـای مکـان نقـاط A و B و C هستند. مرکز دستگاه مختصات را بر روی مرکز کره قرار می‌دهـیم و مثلـث را به نحوی قرار می‌دهیم که بردار A کاملاً در جهت محـور z و بـردار B کـاملاً در صـفحه‌ی $y-z$ باشد.

اگر شعاع کره را به اندازه‌ی یک واحد در نظر بگیریم، داریم که:

$$\vec{A}=(۰,۰,۱)$$
$$\vec{B}=(۰,\sin c,\cos c)$$
$$\vec{C}=(\sin b\sin A,\sin b\cos A,\cos b)$$
$$\vec{B}.\vec{C}=\left|\vec{B}\right|.\left|\vec{C}\right|\cos a=B_xC_x+B_yC_y+B_zC_z$$
$$\Rightarrow \cos a=\sin c\sin b\cos A+\cos c\cos b$$



شکل ۱۱- ۳

❖ رابطه‌های قطبی

مثلث کروی دلخواه ABC را در نظر بگیرید. قطب‌های دایره عظیمـه‌ی $\widehat{BC}$ را مشخص می‌کنیم و آن قطبی که به A نزدیک‌تر است را A' مـی‌نـامیم. بـه همین ترتیب برای اضلاع دیگر هم می‌توانیم قطب‌هـا را مـشخص کنـیم و نقـاط B' و C' را بیابیم. به این ترتیب مثلث کروی $A'B'C'$ را تـشکیل مـی‌دهـیم و ضلع‌های آن را با a'، b' و c' نمایش می‌دهیم.

چون C' قطب $\widehat{AB}$ است، پـس $\widehat{AC'}=۹۰^\circ$ و بـا توجـه بـه اینکـه B' هـم قطـب $\widehat{AC}$ اسـت، مـی‌دانـیم کـه $\widehat{AB'}=۹۰^\circ$. بنابراین A قطب دایره عظیمه‌ی $\widehat{B'C'}$ است. به همین ترتیب متوجه می‌شویم که B و C هم قطب‌های $\widehat{A'C'}$ و $\widehat{A'B'}$ هستند.

اگر دایره عظیمه‌ی گذرنده از $\widehat{BC}$ را رسم کنیم، $\widehat{A'B'}$ و $\widehat{A'C'}$ را به ترتیب در نقاط L و M قطع مـی‌کنـد. B قطـب $\widehat{A'C'}$ است، بنابراین $\widehat{BM}$، ۹۰° می‌شود. از طرف C هم قطب $\widehat{A'B'}$ می‌باشد، پس $\widehat{LC}$ هم ۹۰° است.

$$A'=\widehat{LM}=\widehat{LC}+\widehat{CM}=\widehat{LC}+\widehat{BM}-\widehat{BC}=۱۸۰-a$$

به همین ترتیب می‌توان نشان داد که:

$$B'=۱۸۰-b \qquad C'=۱۸۰-c$$

در ضمن دایره عظیمه‌ی گذرنده از $\widehat{AB}$ و $\widehat{AC}$ هم $\widehat{B'C'}$ را در نقاط N و O قطع می‌کند. با استدلال‌هایی مشابه استدلال‌هـای قبل درمی‌یابیم که $a'=۱۸۰-A$ و در ضمن باز هم می‌توان نشان داد که:

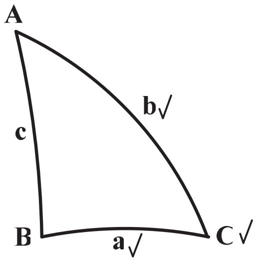
$$b'=۱۸۰-A \qquad c'=۱۸۰-C$$

نتایجی که به آن‌ها رسیدیم، نتایج بسیار خوبی هستند، زیرا به این ترتیب می‌توانیم با نوشتن روابط مثلثات کروی در مثلث قطبـی به رابطه‌ی تازه‌ای دست بیابیم. به عنوان مثال اگر رابطه‌ی کسینوس را در مثلث کروی $A'B'C'$ بنویسیم، داریم که:

$$\cos a'=\cos b'\cos c'+\sin b'\sin c'\cos A'$$
$$\Rightarrow \cos(۱۸۰-A)=\cos(۱۸۰-B)\cos(۱۸۰-C)+\sin(۱۸۰-B)\sin(۱۸۰-C)\cos(۱۸۰-a)$$
$$\Rightarrow -\cos A=\cos B\cos C-\sin B\sin C\cos a$$ رابطه (۷-۳)

با این حال نوشتن رابطه‌ی چهار جزئی و سینوس در مثلث قطبی عملاً به یافتن رابطه‌ی تازه‌ای نمی‌انجامد.

مثال ۱ـ بر روی کره‌ای به شعاع ۱۵cm، مثلث کروی ABC را رسم کرده‌ایم، به طوری که $a=۴۵^\circ$ ، $b=۱۰۹^\circ$, $C=۵۰^\circ$ مساحت این مثلث کروی چقدر است؟



حل. در شکل روبه‌رو a ،b و C که مقدارشان برای‌مان معلوم است، مشخص شده‌اند. در ضمن می‌دانیم که برای محاسبه‌ی مساحت این مثلث نیاز به A و B داریم.

می‌توانیم رابطه‌ی چهارجزئی را بین A و b و C و a بنویسیم و A را به‌دست آوریم.

$$\cos b\cos C=\sin b\cot a-\sin C\cot A$$

$$\Rightarrow \cot A=\frac{\cos b\cos C-\sin b\cot a}{-\sin C}\Rightarrow A=۳۳^\circ/۵۶$$

حالا می‌توانیم یک بار هم رابطه‌ی چهارجزئی را بینِ B ، a ،C و b بنویسیم، تا B را هم به‌دست آوریم. راه دیگری که داریم این است که رابطه‌ی سینوس را بین A، a، B و b بنویسیم.

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}\Rightarrow \sin B=\frac{\sin A}{\sin a}\times\sin b\Rightarrow \sin B=۰/۷۳۹$$

با توجه به اینکه $\sin B$ برابرست با ۰/۷۳۹، مقدار B می‌تواند $۴۷^\circ/۶۶$ یا $(۱۸۰^\circ-۴۷^\circ/۶۶)$ باشد. بنابراین در این حالت با قطعیت نمی‌توانیم، B را مشخص کنیم. امّا اگر بین اجزای B ، a ، C و b رابطه‌ی چهارجزئی را بنویسیم، B را از روی $\cot B$ می‌یابیم و با توجه به اینکه B بین ۰° و ۱۸۰° است، بصورت یکتا مشخص می‌شود.

$$\cos a\cos C=\sin a\cot b-\sin C\cot B$$

$$\Rightarrow \cot B=\frac{\cos a\cos C-\sin a\cot b}{-\sin C}\Rightarrow B=۱۳۲^\circ/۳۴$$

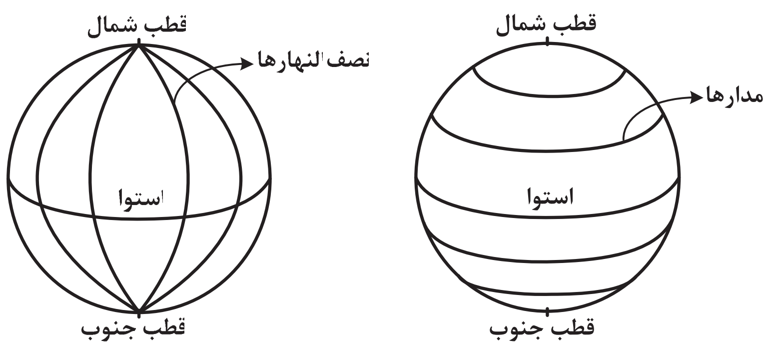
که این در واقع همان $(۱۸۰^\circ-۴۷^\circ/۶۶)$ است.

طول و عرض جغرافیایی

محور دوران زمین، سطح زمین را در دو نقطه قطع می‌کند که این دو نقطه قطب‌های زمین است. صفحه‌ای عمود بر محور دوران زمین که از مرکز زمین می‌گذرد، سطح زمین را بصورت دایره عظیمه‌ای قطع می‌کند، این دایره عظیمه استوای زمین است.

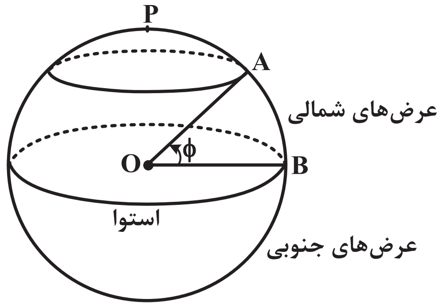
به نیم دایره‌هایی که قطب شمال را به قطب جنوب متصل می‌کنند، « نصف‌النهار » می‌گوییم. می‌توان بی‌شمار نصف‌النهار بر روی سطح زمین رسم کنیم. در ضمن موازی با استوای زمین هم می‌توانیم بی‌شمار دایره صغیره بکشیم، این دایره صغیره‌ها را « مدار » می‌نامیم.

به شکل زیر نگاه کنید. در این شکل مدارها و نصف‌النهارهای زمین را مشاهده می‌کنید.



شکل ۱۲-۳

برای این‌که مکان هر نقطه را بر روی زمین مشخص کنیم، کافی است بدانیم که کدام مدار و کدام نصف‌النهار از روی این نقطه عبور می‌کند. اگر هر نقطه بر روی یک مدار را به مرکز زمین متصل کنیم، پاره‌خطی پدید می‌آید. زاویه‌ای که این پاره‌خط با استوای زمین می‌سازد را « عرض جغرافیایی » این مدار می‌نامیم. عرض جغرافیایی را معمولاً با ϕ (فی) نشان می‌دهیم. عرض جغرافیایی مدارهایی که در نیم‌کره‌ی شمالی قرار دارند را با پسوند شمالی (N) و عرض جغرافیایی مدارهایی که در نیم‌کره‌ی جنوبی قرار دارند را با پسوند جنوبی (S) مشخص می‌کنیم. به عنوان مثال، عرض جغرافیایی شمالی‌ترین نقطه‌ی ایران حدوداً 40° است.

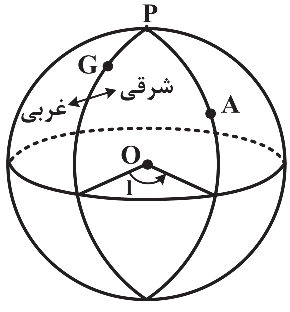


شکل ۱۳-۳

برای مشخص کردن نصف‌النهارها هم به یک نصف‌النهار معیار نیاز داریم، تا موقعیت سایر نصف‌النهارها را نسبت به آن مشخص کنیم. برای این کار طبق قرارداد بین‌المللی نصف‌النهاری که از رصدخانه‌ی گرینویچ می‌گذرد را به عنوان نصف‌النهار معیار در نظر می‌گیریم.

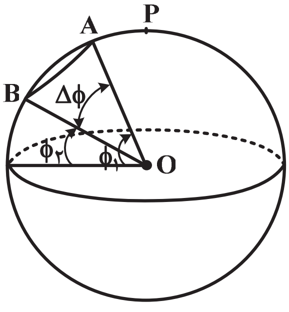
حال می‌توانیم هر نصف‌النهار را با زاویه‌ای که با نصف‌النهار گرینویچ می‌سازد، مشخص کنیم. این زاویه را « طولِ جغرافیایی » می‌نامیم. این طور قرارداد می‌کنیم که طول جغرافیایی از صفر درجه تا ۱۸۰ درجه را شامل شود. بنابراین طول‌های جغرافیایی به دو دسته‌ی شرقی (E) و غربی (W) تقسیم می‌شوند. اگر ناظری بر روی نصف‌النهار گرینویچ به طرف شمال بایستد، سمت راست او جهت شرق و سمت چپ او جهت غرب است.

به شکل ۱۴-۳ نگاه کنیدکه طول جغرافیایی را برای ناظر A نشان می‌دهد. در این شکل، زاویه‌ی $G\hat{P}A$ طول جغرافیایی شرقی ناظر A است. طول جغرافیایی را معمولاً با حرف l نمایش می‌دهیم.



شکل ۱۴-۳

مثال ۲ـ شهر تونس با عرض جغرافیایی 37° شمالی و شهر هامبورگ با عرض جغرافیایی 54° شمالی حدوداً بر روی یک نصف‌النهار قرار دارند. اگر این دو شهر را به وسیله‌ی تونلی که به صورت خط مستقیم است، به هم متصل کنیم، طول تونل چقدر خواهد بود؟



حل. به شکل مقابل توجه کنید. در این شکل ϕ_1 و ϕ_2 به ترتیب عرض جغرافیایی هامبورگ و تونس، و A و B به ترتیب نشانگر مکان این دو شهر است.

می‌خواهیم در مثلث مسطح $\overset{\Delta}{ABO}$، AB را محاسبه کنیم.

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO.BO.Cos\,\Delta\phi$$

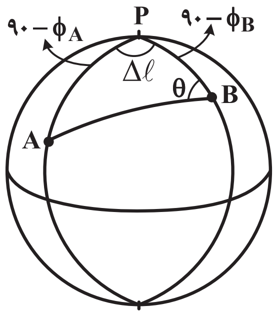
که AO و BO برابر با شعاع زمین ($\simeq 6400\,km$) می‌باشد و $\Delta\phi = 17^\circ$. پس:

$$AB = 1900\,km$$

مثال ۳ ـ طول و عرض جغرافیایی مکّه‌ی معظم به‌ترتیب ′۵۴°۳۹ شرقی و ′۲۷°۲۱ شمالی است. محاسبه کنید که جهت قبله در شهر پکن با طول و عرض جغرافیایی ′۲۶°۱۱۶ شرقی و ′۵۶°۳۹ شمالی، چه زاویه‌ای با جهت شمالی می‌سازد.

حل. به شکل زیر توجه کنید، که در آن مکه و پکن با نقاط A و B مشخص شده‌اند. طول و عرض جغرافیایی این دو شهر را هم به ترتیب با l_A، ϕ_A و l_B، ϕ_B نمایش می‌دهیم.

زاویه‌ای که نصف النهارهای مکه و پکن با هم می‌سازند به اندازه‌ی Δl است ($\Delta l = l_B - l_A$). و زاویه‌ی $\widehat{PA}$, $\widehat{PB}$ و به ترتیب $۹۰-\phi_A$ و $۹۰-\phi_B$ هستند. θ هم زاویه‌ای است که جهتِ قبله، با جهت شمال می‌سازد.



در مثلث کروی PAB رابطه‌ی چهارجزئی را می‌نویسیم:

$$\cos\Delta l\cos(۹۰-\phi_B) = \sin(۹۰-\phi_B)\cot(۹۰-\phi_A) - \sin\Delta l\cot\theta$$

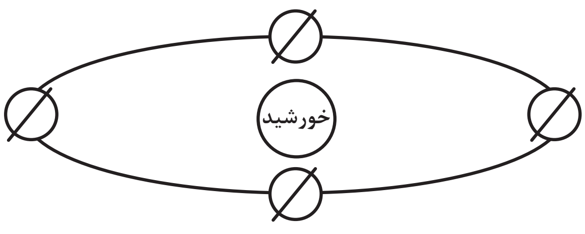
$$\Rightarrow \cos\Delta l\sin\phi_B = \cos\phi_B\tan\phi_A - \sin\Delta l\cot\theta$$

$$\Rightarrow \cot\theta = \frac{\cos\Delta l\sin\phi_B - \cos\phi_B\tan\phi_A}{-\sin\Delta l} \Rightarrow \theta = ۸۱^\circ ۰۸'$$

کره‌ی آسمان

زمین در مداری بیضوی به دور خورشید می‌گردد، امّا چون خروج از مرکز بیضی مدار زمین بسیار کوچک است ($e = ۰/۰۱۶۷$)، می‌توان مدار آن را یک دایره در نظر گرفت. صفحه‌ای که مدار زمین در آن قرار دارد را صفحه‌ی دایرةالبروج می‌نامیم. استوای زمین دقیقاً در صفحه‌ی دایره‌البروج قرار ندارد بلکه با آن زاویه‌ای می‌سازد که این زاویه را معمولاً با ε (اپسیلُن) نشان می‌دهیم که برابر است با ′۲۷°۲۳.

به شکل ۱۵-۳ توجه کنید. در این شکل، مدار زمین را مشاهده می‌کنید که زمین در چهار موقعیت در آن ترسیم شده است.

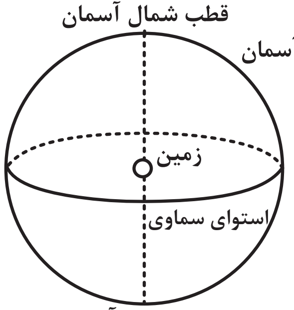


شکل ۱۵-۳

امتداد محور دوران زمین همواره به سوی نقطه‌ای در آسمان خواهد بود. از این پس می‌خواهیم یک مدل‌سازی انجام دهیم و موقعیت ستارگان را در آسمان به شکل ظاهری در نظر بگیریم. بنابراین ستارگان را به صورت نقطه‌هایی که به کره‌ای چسبیده‌اند، فرض می‌کنیم. شعاع این کره بسیار زیاد خواهد بود. این‌طور در نظر گرفتن آسمان، دور از ذهن نیست، حتی در زمان‌های دور معمولاً

مردم این ذهنیت را نسبت به آسمان داشته‌اند. بنابراین از این پس ستارگان را بصورت نقاطی بر روی « کره‌ی آسمان » در نظر می‌گیریم، که ما از مرکز این کره به آن‌ها می‌نگریم.

به شکل ۱۶-۳ نگاه کنید. در این شکل زمین را در مرکز کره‌ی آسمان مشاهده می‌کنید.



شکل ۱۶-۳

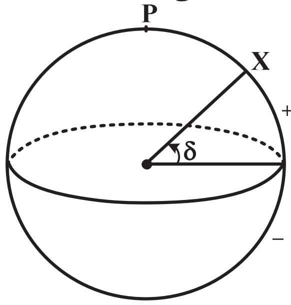
اگر محور دوران زمین را امتداد دهیم، کره‌ی آسمان را در دو نقطه قطع خواهد کرد. این دو نقطه را قطب شمال و قطب جنوب آسمان می‌نامیم. در ضمن اگر صفحه‌ای که استوای زمین در آن قرار دارد را ادامه دهیم، کره‌ی آسمان (کره‌ی سماوی) را بصورت دایره عظیمه‌ای قطع می‌کند که به این دایره عظیمه، « استوای سماوی » می‌گوییم.

مختصات سماوی

حال که قطب شمال و جنوب و مدار استوا را بر روی کره‌ی آسمان مشخص کردیم، کافی است همان کاری را که بر روی زمین انجام داده‌ایم، برای کره‌ی سماوی هم انجام دهیم تا بتوانیم هر نقطه‌ای را بر روی آن مشخص کنیم. بر روی کره‌ی سماوی چیزی شبیه به طول و عرض جغرافیایی تعریف می‌کنیم و نام آن را « بُعد » و « میل » می‌گذاریم.

میل زاویه‌ای است که یک مدار با استوای سماوی می‌سازد. میل را معمولاً با δ (دلتا) نشان می‌دهیم، که مقدار آن می‌تواند مثبت یا منفی باشد. (میل نقاطی که در نیم‌کره‌ی شمالی آسمان هستند، مثبت و میل نقاطی که در نیم‌کره‌ی جنوبی آسمان هستند، منفی است.)

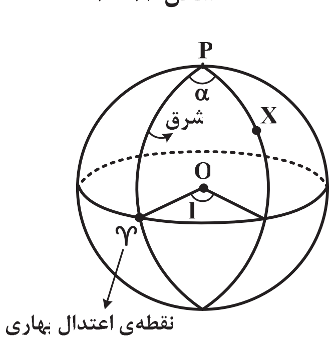
به شکل ۱۷-۳ توجه کنید که در آن، زاویه‌ی میل نمایش داده شده است.



شکل ۱۷- ۳

امّا برای مشخص کردن زاویه‌ی بین نصف‌النهارها نیاز به یک نصف‌النهار معیار داریم (همان‌گونه که نصف‌النهار گرینویچ در سطح زمین نصف‌النهار معیار است). برای این کار از نقطه‌ی اعتدال بهاری[1] کمک می‌گیریم و نصف‌النهاری که از این نقطه می‌گذرد را، معیار قرار می‌دهیم. پس بُعد را به صورت زاویه‌ای بین هر نصف‌النهار و نصف‌النهار اعتدال بهاری در نظر می‌گیریم. به شکل ۱۸-۳ توجه کنید. زاویه‌ی بُعد را از سمت شرق نصف‌النهار اعتدال بهاری می‌سنجیم. (یعنی بعد شرقی و غربی نداریم، بلکه بُعد همواره شرقی است و زاویه‌ای بین صفر درجه تا 360° می‌تواند داشته باشد.)

بُعد را معمولاً با α (آلفا) مشخص می‌کنیم.



شکل ۱۸- ۳

1 ـ نقطه‌ی اعتدال بهاری مکانی بر روی استوای سماوی است که خورشید در لحظه‌ی تحویل سال یعنی شروع فصل بهار از آن می‌گذرد . نقطه‌ی اعتدال بهاری را با γ (گاما) نمایش می‌دهیم

اغلب به جای اینکه بُعد یک ستاره بر حسب درجه بیان شود، از ساعت استفاده می‌شود. هر ۳۶۰°، ۲۴ ساعت است. هـر سـاعت را هم به قسمت‌های ریزتر دقیقه و ثانیه تقسیم می‌کنیم:

$$۳۶۰^\circ = ۲۴^h \Rightarrow ۱^h = ۱۵^\circ$$

$$۱^h = ۶۰^m \quad , \quad ۱^m = ۶۰^s$$

دقت کنید، که این دقیقه و ثانیه (با نمادِ ^{m} و ^{s}) را با دقیقه‌ی قوسی و ثانیه‌ی قوسی (با نماد $'$و $''$) اشتباه نگیرید.
می‌توان گفت:

$$\theta^\circ = ۱۵\theta^h \qquad \text{رابطه (۸-۳)}$$

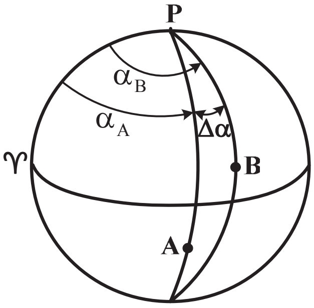
که در رابطه‌ی بالا θ°، زاویه بر حسب درجه و θ^h زاویه بر حسب ساعت است.

مثال ۴- ستاره‌ی شِعرای یمانی(شباهنگ) با بُعد و میلِ، $۶^h۴۴^m$ و $-۱۶^\circ ۴۱'$ و ستاره‌ی شِعرای شامی با بُعد و میلِ، $۷^h۳۸^m$ و $+۵^\circ ۱۷'$ را در نظر بگیرید.

الف) فاصله‌ی بین نصف‌النهارهای این دو ستاره، در کره‌ی سماوی چند درجه است؟

ب) فاصله‌ی زاویه‌ای این دو ستاره از هم چقدر است؟

حل. با توجه به شکل زیر زاویه‌ی بین نصف‌النهارهای این دو ستاره برابر است با اختلاف بُعد آن‌ها.

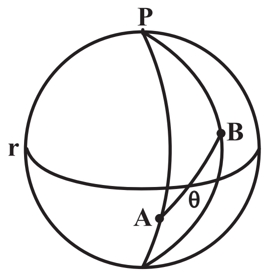


که در این شکل نقطه‌ی A مکان شعرایِ یمانی و نقطه‌ی B مکان شعرای شامی است و α_A , α_B به ترتیب بعدهای این دو ستاره است.

$$\Delta\alpha^h = \alpha_B - \alpha_A = (۷^h۳۸^m) - (۶^h۴۴^m) = ۰^h۵۴^m = ۰/۹^h$$

$$\Delta\alpha^\circ = ۱۵\Delta\alpha^h \Rightarrow \Delta\alpha^\circ = ۱۵ \times ۰/۹ = ۱۳^\circ/۵ = ۱۳^\circ ۳۰'$$

و حالا برای اینکه فاصله‌ی زاویه‌ای این دو ستاره را به‌دست آوریم، باید مقدار θ (یعنی $\overline{AB}$) را در شکل زیر محاسبه کنیم.



برای محاسبه‌ی θ از مثلث کروی PAB استفاده می‌کنیم. در این مثلث می‌دانیم که:

$$A\hat{P}B = \Delta\alpha$$

$$\widehat{PA} = ۹۰ - \delta_A$$

$$\widehat{PB} = ۹۰ - \delta_B$$

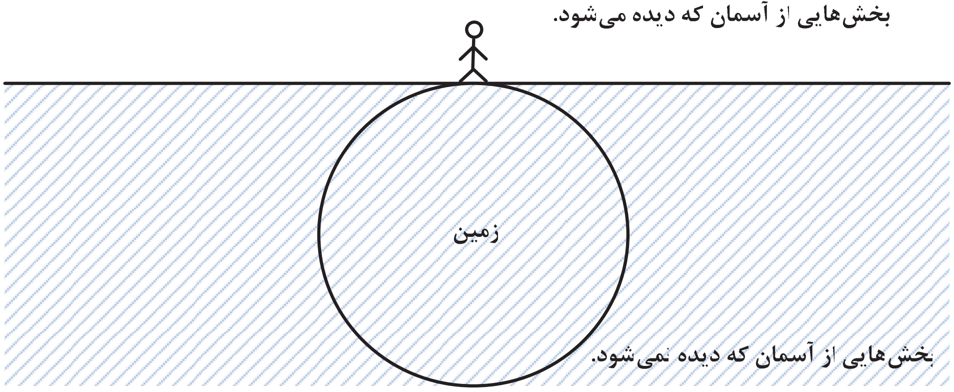
که در این روابط δ_A و δ_B میل A و B (شعرای یمانی و شعرای شامی) است. دقت کنید که میل‌ها را همراه با علامت‌شان در نظر گرفته‌ایم. مثلاً مقدار کمان $\widehat{PA}$ یعنی فاصله‌ی A از قطب شمال آسمان را با $۹۰-\delta_A$ نشان داده‌ایم که با منفی گذاشتن δ_A تبدیل می‌شود به $۹۰-(-۱۶^\circ۴۱')$ یعنی $۹۰+۱۶^\circ۴۱'$.

رابطه‌ی کسینوس را در مثلثِ کروی PAB می‌نویسیم:

$$\cos\widehat{AB} = \cos\widehat{PA}\cos\widehat{PB} + \sin\widehat{PA}\sin\widehat{PB}\cos A\hat{P}B$$
$$\Rightarrow \cos\theta = \cos(۹۰-\delta_A)\cos(۹۰-\delta_B) + \sin(۹۰-\delta_A)\sin(۹۰-\delta_B)\cos\Delta\alpha$$
$$\Rightarrow \cos\theta = \sin\delta_A\sin\delta_B + \cos\delta_A\cos\delta_B\cos\Delta\alpha$$
$$\Rightarrow \theta = ۲۵^\circ۴۲'$$

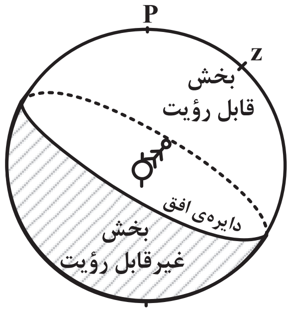
کره‌ی آسمان از دیدِ ناظران زمینی

گفتیم که اگر محورِ دورانِ زمین را امتداد دهیم، کره‌ی آسمان را در دو نقطه قطع خواهد کرد: قطب شمال و جنوب آسمان.
به شکل زیر نگاه کنید. این شکل ناظرِ دلخواهی را بر روی سطح زمین نشان می‌دهد.



شکل ۱۹- ۳

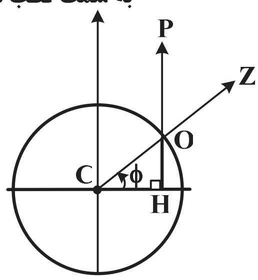
زمین باعث می‌شود که در هر لحظه، بخشی از آسمان برای ناظر، غیرقابل رویت باشد. اگر از ارتفاع ناظر از سطح زمین صرف‌نظر کنیم، متوجه می‌شویم که دو بخش قابل رویت و غیرقابل رویت بوسیله‌ی صفحه‌ای که بر سطح زمین در مکان ناظر مماس است، از هم جدا می‌شوند. اگر این صفحه را امتداد دهیم، کره‌ی آسمان را بصورت دایره عظیمه‌ای قطع می‌کند. به این دایره عظیمه، «دایره‌ی افق» می‌گوییم.



شکل ۲۰-۳

در ضمن اگر خطی از مرکز زمین به ناظر وصل کنیم و آن را امتداد دهیم، کره‌ی آسمان را در نقطه‌ای قطع می‌کند، که به آن «سمت الرأس» یا «سرسو» می‌گوییم. در شکل ۲۰-۳ سمت‌الرأس ناظر را با z مشخص کرده‌ایم.

حالا می‌خواهیم، زاویه‌ی بین سمت‌الرأس (z) و قطب شمال آسمان (P) را برای ناظری در عرض جغرافیایی ϕ پیدا کنیم. به شکل ۲۱-۳ توجه کنید:

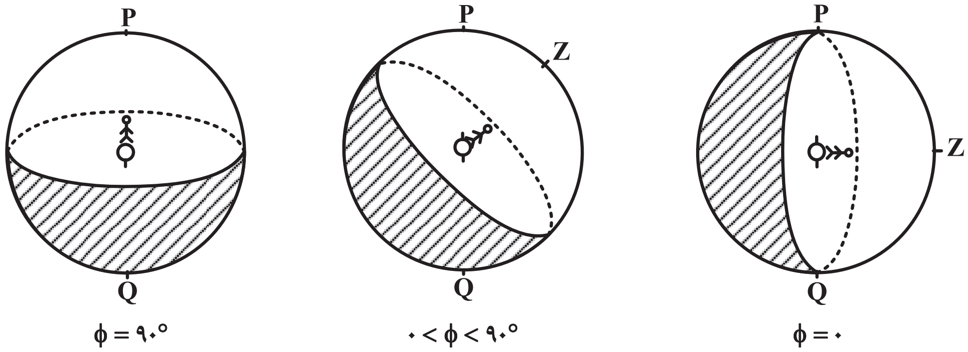


شکل ۲۱-۳

در شکل بالا، O مکان ناظر و C مرکزِ زمین است. با توجه به اینکه جهت قطب شمال آسمان موازی با محور دوران زمین است، پس خط PH بر CH عمود است. ما زاویه‌ی $P\hat{O}Z$ را می‌خواهیم:

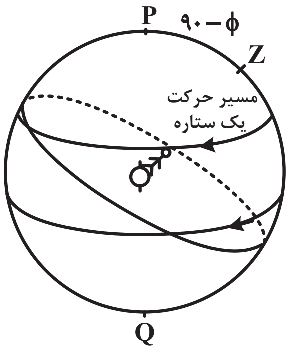
$$P\hat{O}Z = C\hat{O}H = ۹۰ - O\hat{C}H \Rightarrow \quad P\hat{O}Z = ۹۰ - \phi$$ رابطه (۹-۳)

به شکل‌های زیر توجه کنید:



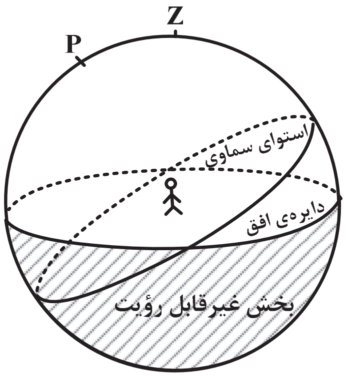
شکل ۲۲-۳

حالا ناظری را در نظر بگیرید که در یک عرض جغرافیایی میانی ($۹۰ > \phi > ۰$) به آسمان نگاه می‌کند. از دید این ناظر z و P همواره زاویه‌ی $۹۰ - \phi$ را با هم می‌سازند. از طرفی می‌دانیم که زمین با تناوب $۲۳^h ۵۶^m ۰۴^s$ (نسبت به ستارگان دور دست) به دور خود می‌چرخد، بنابراین z بصورت دایره‌ی صغیره‌ای به دور قطب شمال آسمان می‌گردد (از غرب به شرق). می‌توانیم طور دیگری هم به این موضوع نگاه کنیم. یعنی زمین را ثابت در نظر بگیریم و فکر کنیم که کره‌ی آسمان به دور زمین می‌گردد (از شرق به غرب). بر این اساس می‌توان گفت که ناظری در عرض جغرافیایی ϕ، آسمان را به شکل ۲۳-۳ مشاهده می‌کند.



شکل ۲۳-۳

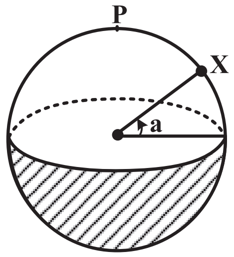
در شکل ۲۴-۳، زمین و جهت سمت‌الرأس ناظر ثابت هستند و این کره‌ی آسمان است که با تناوب $23^h 56^m 04^s$ به دور زمین می‌چرخد. از این پس شکل‌ها را به طوری رسم می‌کنیم که سمت‌الرأس ناظر در بالای شکل قرار بگیرد.



شکل ۲۴-۳

سمت و ارتفاع

اکنون می‌خواهیم دستگاه مختصات تازه‌ای که وابسته به مکان ناظر است را معرفی کنیم. یک بار دیگر به شکل ۲۴-۳ نگاه کنید. ناظر دایره عظیمه‌ی افق را مشاهده می‌کند و می‌دانیم که سمت‌الرأس، قطب این دایره عظیمه است. مشابه کاری که برای تعریف طول و عرض جغرافیایی و بعد و میل انجام داده‌ایم را اکنون نیز می‌توانیم، انجام دهیم. بنابراین دایره صغیره‌های مدارها را موازی با دایره‌ی افق در نظر می‌گیریم. هر یک از این مدارها زاویه‌ای با دایره‌ی افق می‌سازد، این زاویه را، « ارتفاع » می‌نامیم و با a نمایش می‌دهیم.



شکل ۲۵-۳

گاهی اوقات، به‌جای استفاده از ارتفاع از « فاصله‌ی سمت‌الرأسی » استفاده می‌شود. فاصله‌ی سمت‌الرأسی که با z نمایش داده می‌شود، فاصله‌ی یک ستاره تا سمت‌الرأس است و مشخص است که متمم ارتفاع می‌باشد. یعنی:

$$z = 90 - a \qquad \text{رابطه (۱۰-۳)}$$

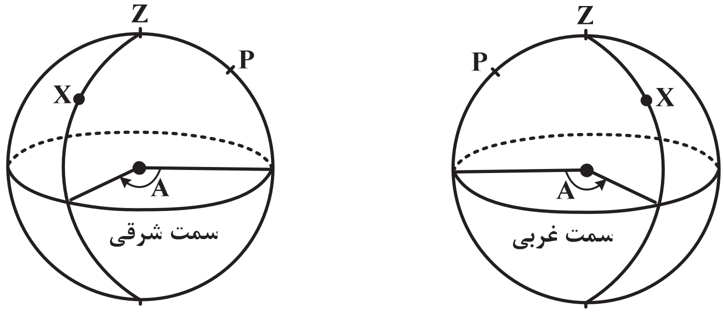
چون ما همواره نیمی از کره‌ی آسمان را مشاهده می‌کنیم، به نظر می‌رسد که ارتفاع همواره به صورت مثبت تعریف می‌شود و مقداری بین صفر تا 90° می‌تواند داشته باشد. البته گاهی از تعبیرِ « ارتفاع منفی » نیز استفاده می‌شود امّا فعلاً ما به این موضوع نمی‌پردازیم.

مثال ۵- ناظری در شهر قم با عرض جغرافیایی $34^\circ 39'$ به طرف شمال ایستاده است و می‌خواهد ستاره‌ی قطبی را مشاهده کند. او باید به چه ارتفاعی نگاه کند؟

حل. همان‌طور که پیش از این ملاحظه کردید، می‌دانیم که فاصله‌ی زاویه‌ای قطب شمال آسمان و سمت‌الرأس، $90-\phi$ است. بنابراین ارتفاع ستاره‌ی قطبی در هر مکانی برابر عرض جغرافیایی است. پس این ناظر هم باید به ارتفاع $34^\circ 39'$ نگاه کند.

مشخص است که علاوه بر ارتفاع، ما نیازمند تعریف زاویه‌ی دیگری هم هستیم تا بتوانیم هر نقطه را از دید یک ناظر مشخص کنیم. این بار هم از نصف‌النهارها استفاده می‌کنیم. این نصف‌النهارها را از سمت‌الرأس (z) عمود بر افق رسم می‌کنیم. حال برای اینکه موقعیت یک ستاره را مشخص کنیم، کافی است بگوییم بر روی کدام نصف‌النهار قرار دارد و در ضمن ارتفاع آن چقدر است. طبق

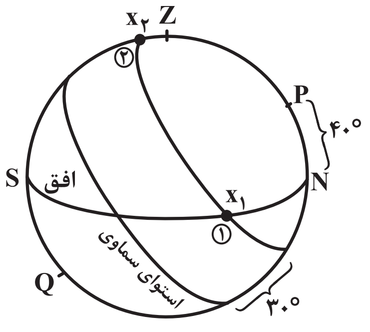
معمول برای مشخص کردن نصف‌النهارها از یک نصف‌النهار مبداء استفاده می‌کنیم. این نصف‌النهار مبداء را نصف‌النهاری که از قطب شمال سماوی می‌گذرد، در نظر می‌گیریم و « سمت » را زاویه‌ی بین نصف‌النهار گذرنده از یک ستاره و نصف‌النهاری که از قطب شمال می‌گذرد، تعریف می‌کنیم. سمت را معمولاً با A نمایش می‌دهیم. در ضمن سمت ستارگانی که در شرق آسمان هستند را شرقی و سمت ستارگانی که در غرب آسمان هستند را غربی در نظر می‌گیریم، بنابراین سمت می‌تواند بین صفر تا $^\circ$۱۸۰ باشد.



شکل ۲۶-۳

در شکل ۲۶-۳ ، نمونه‌ای از سمت شرقی و غربی را مشاهده می‌کنید. اگر ناظری به سمت شمال بایستد، دست راست او به طرف شرق و دست چپ او به طرف غرب، خواهد بود. می‌توانید از این موضوع برای به خاطر سپردن سمت شرقی و غربی استفاده کنید.

به شکل زیر نگاه کنید. این شکل، مسیر حرکت ظاهری یک ستاره با میل $^\circ$۳۰ را در شهری با عرض جغرافیایی $^\circ$۴۰ نشان می‌دهد.



شکل ۲۷- ۳

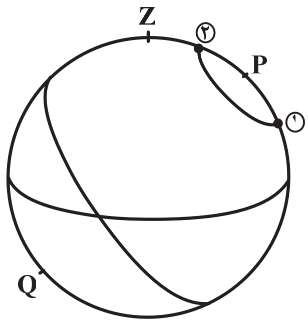
همان‌طور که مشخص است، این ستاره در نقطه (۱) طلوع می‌کند. در هنگام طلوع، ارتفاع این ستاره $^\circ$۰ و فاصله‌ی سمت‌الرأسی آن $^\circ$۹۰ است. پس از طلوع همان طور که مشاهده می‌کنید، سمت آن شرقی است و به مرور به مقدار سمت و ارتفاع آن افزوده می‌شود تا اینکه در بالاترین ارتفاع خود یعنی نقطه‌ی (۲) قرار می‌گیرد. در این حالت سمت آن $^\circ$۱۸۰ می‌شود.

به نیم‌دایره‌ی $\widehat{PZQ}$، « نصف‌النهار ناظر » می‌گوییم و وقتی یک ستاره به روی نصف‌النهار ناظر می‌رسد (یعنی مانند نقطه‌ی(۲)) اصطلاحاً می‌گوییم در حال عبور بالایی است.

حالا یک بار دیگر شکل ۲۷-۳ را ملاحظه کنید. می‌خواهیم بدانیم که ارتفاع این ستاره وقتی در نقطه‌ی (۲) است (یعنی در حال عبور بالایی است) چقدر می‌باشد؟

در واقع ارتفاع ستاره در این حالت، فاصله‌ی زاویه‌ای $X_۲$ و Sاست. که متشکل از فاصله‌ی $X_۲$ تا استوای سماوی و فاصله‌ی استوای سماوی تا S می‌باشد. فاصله‌ی $X_۲$ تا استوای سماوی، در واقع همان میل ستاره یعنی $^\circ$۳۰است و فاصله‌ی استوای سماوی تا S، متمم $\widehat{PN}$می‌باشد، با توجه به این‌که عرض جغرافیایی ناظر $^\circ$۴۰است، پس $\widehat{PN}$، $^\circ$۴۰ می‌باشد، که متمم آن $^\circ$۵۰ می‌شود، بنابراین ارتفاع ستاره در حال عبور بالایی $^\circ$۸۰ می‌شود.

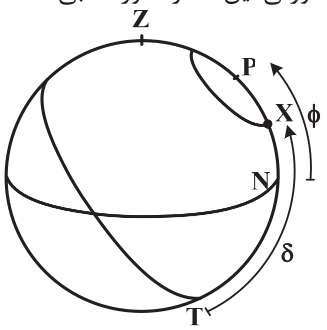
در شکل ۲۸-۳، مسیر ستاره‌ای با میل 75° از دید ناظری در مکانی با عرض جغرافیایی 40° نمایان است.



شکل ۲۸- ۳

همان‌طور که می‌بینید، این ستاره اصلاً طلوع و غروب ندارد و همواره در آسمان این ناظر بالای افق است. به این ستارگان، « دور قطبی» می‌گویند. این ستارگان علاوه بر عبور بالایی (در نقطه‌ی (۲)) ، عبور پایینی هم دارند (در نقطه‌ی (۱)). ارتفاع ستاره‌ی مورد نظر ما در نقطه‌ی (۱) ، $\phi-(90-\delta)$ یعنی 25° و در نقطه‌ی (۲) ، $\phi+(90-\delta)$ یعنی 55° است.

مثال ۶ ـ ناظری در عرض جغرافیایی ϕ قرار دارد. ستاره‌ای با میل δ در نظر بگیرید. در چه صورتی این ستاره دور قطبی است و در چه صورتی هرگز قابل مشاهده نخواهد بود؟



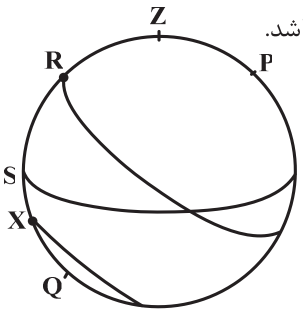
برای اینکه این ستاره دور قطبی باشد، باید در هنگام عبور پایینی، بالای افق باشد.

شرط دور قطبی بودن: $\widehat{PX} < \widehat{PN}$

$\widehat{PX} = 90 - \widehat{XT}$, $\widehat{XT} = \delta$, $\widehat{PN} = \phi$

$\Rightarrow 90-\delta < \phi$ رابطه (۱۱-۳)

یعنی عرض جغرافیایی محل رصد ستاره باید بیش از $90-\delta$ باشد.



امّا برای اینکه یک ستاره، هرگز دیده نشود، لازم است که حتی در حال عبور بالایی هم زیر افق باشد.

شرط دیده نشدن: $\widehat{QX} < \widehat{QS}$

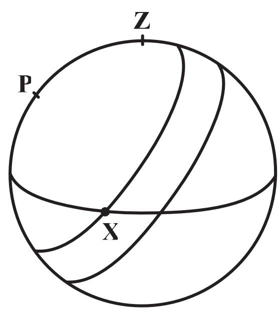
(با توجه به نحوه‌ی تعریف میل)

$\widehat{QX} = 90 - \widehat{XR}$, $\widehat{XR} = -\delta$, $\widehat{QS} = \phi$

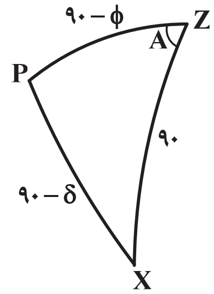
$\Rightarrow 90+\delta < \phi$ رابطه (۱۲-۳)

مثال ۷ ـ ستاره‌ی سماک رامح با میل $19^\circ 08'$ در خرمشهر با عرض جغرافیایی $30^\circ 26'$ در هنگام غروب چه سمتی دارد؟

شکل زیر، این ستاره را در حال غروب نشان می‌دهد.



حال باید مثلث کروی PZX را تشکیل دهیم:



مشخص است که می‌توانیم از رابطه‌ی کسینوس استفاده کنیم:

$$\cos(90-\delta)=\cos 90 \cos(90-\phi)+\sin 90 \sin(90-\phi)\cos A$$

$$\Rightarrow \sin\delta=\cos\phi\cos A$$

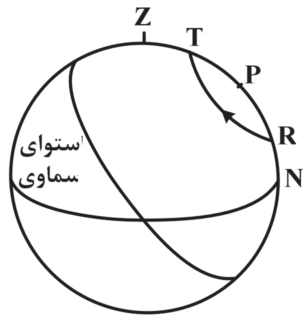
$$\Rightarrow \cos A=\frac{\sin\delta}{\cos\phi}$$

$$\left.\begin{array}{l}\delta=19^\circ 08' \\ \phi=30^\circ 26'\end{array}\right\}\Rightarrow A=67^\circ 39'$$

بنابراین در هنگام غروب، سمت این ستاره، $67^\circ 39'$ غربی است.

مثال ۸ ـ بیش‌ترین و کم‌ترین ارتفاع ستاره‌ای با میل 60° از دید ناظری در عرض جغرافیایی 40° چقدر است؟ بیش‌ترین سمت این ستاره چقدر است؟

می‌دانیم که بیش‌ترین و کم‌ترین ارتفاع، به ترتیب در هنگام عبور بالایی و پایینی است.



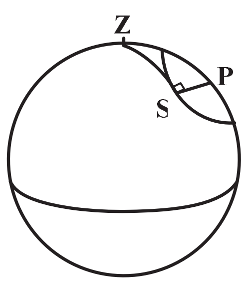
در شکل بالا مشخص است که کم‌ترین ارتفاع $\widehat{RN}$ و بیش‌ترین ارتفاع $\widehat{TN}$ است.

$$\widehat{PN}=\phi \quad , \quad \widehat{PR}=\widehat{PT}=90-\delta$$

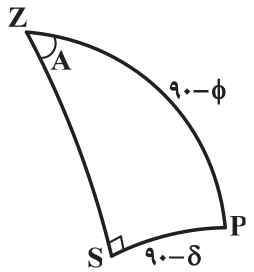
$$\Rightarrow \widehat{RN}=\widehat{PN}-\widehat{PR}=\phi-(90-\delta)=40-30=10^\circ$$ (کم‌ترین ارتفاع)

$$\Rightarrow \widehat{TN}=\widehat{PN}+\widehat{PT}=\phi+(90-\delta)=40+30=70^\circ$$ (بیش‌ترین ارتفاع)

امّا سمت این ستاره را در هر لحظه با رسم دایره عظیمه‌ی گذرنده از ستاره و سمت‌الرأس متوجه می‌شویم. با توجه به شکل زیر، بیش‌ترین سمت هنگامی است که این دایره عظیمه بر مسیر ستاره مماس شود.



چون $\widehat{ZS}$ بر مسیر ستاره مماس است، پس زاویه‌ی $Z\hat{S}P$، ۹۰° است.
حالا می‌توانیم در مثلث کروی PSZ، با نوشتن رابطه‌ی سینوس بیش‌ترین سمت را به‌دست آوریم.

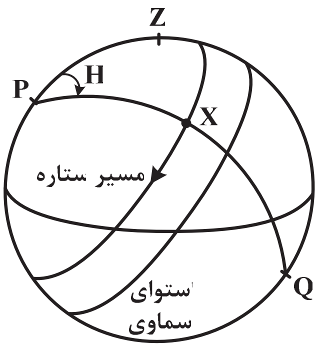


$$\frac{\sin A}{\sin(۹۰-\delta)}=\frac{\sin ۹۰}{\sin(۹۰-\phi)}\Rightarrow \sin A=\frac{\cos\delta}{\cos\phi}\Rightarrow A=۴۰^\circ/۷۵$$

زاویه ساعتی

پیش از این گفتیم که برای ساده‌تر شدن محاسبات، در یک مدل‌سازی، ستارگان را نقاطی که بر روی کره‌ی آسمان قرار دارند، در نظر می‌گیریم. زمین که ابعادش بسیار کوچکتر از کره‌ی آسمان است، در مرکز این کره قرار گرفته است و در هر شبانه روز نجومی (یعنی $۲۳^h۵۶^m۰۴^s$) یک بار از غرب به شرق می‌چرخد. گردش زمین موضوعی نسبی است و ما برای نگاه ساده‌تر به بسیاری از مسائل، فرض می‌کنیم که زمین ثابت است و کره‌ی آسمان هر $۲۳^h۵۶^m۰۴^s$ یک بار از شرق به غرب (عکس جهت چرخش زمین) می‌چرخد.

از این پس می‌خواهیم زمان را هم وارد بحث‌های خود کنیم و به سؤالاتی شبیه به اینکه، یک ستاره چه مدتی بالای افق است، پاسخ دهیم. برای این کار نصف‌النهار ناظر را به عنوان مبداء در نظر می‌گیریم. زاویه‌ای که نصف‌النهار یک ستاره در هر لحظه با آن می‌سازد را « زاویه ساعتی » می‌گوییم و با H نمایش می‌دهیم.

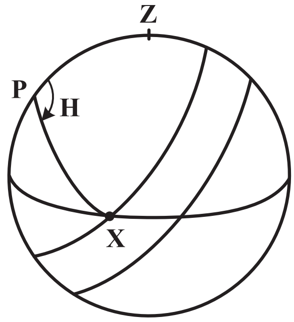


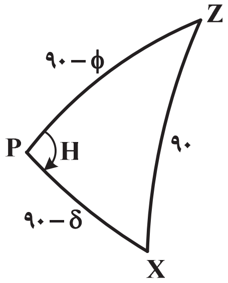
شکل ۲۹-۳

به تعبیری دیگر، زاویه ساعتی یک ستاره نشان‌دهنده‌ی این است که کره‌ی آسمان پس از عبور بالایی آن ستاره، چقدر چرخیده است. به همین خاطر زاویه ساعتی را از سمت غرب نصف‌النهار ناظر اندازه‌گیری می‌کنیم و مقداری از ۰ تا ۳۶۰° را به آن نسبت می‌دهیم. زاویه ساعتی یک ستاره در هنگام عبور بالایی ۰° است و پس از آن به مرور افزایش می‌یابد و در هنگام عبور پایینی ۱۸۰° می‌شود.

اغلب مرسوم است که زاویه ساعتی بر حسب ساعت بیان می‌شود. همان‌طور که در قسمت تعریف بُعد گفتیم، ساعت در اینجا بیان‌کننده زاویه است و نباید با کاربرد روزمره‌ی ساعت، اشتباه گرفته شود. البته مشخص است که استفاده از لفظ ساعت هم در اینجا بی‌علّت نیست. اگر هر شبانه روز نجومی را به ۲۴ ساعت نجومی تقسیم کنیم، آن وقت، هنگامی که مثلاً می‌گوییم، زاویه ساعتی یک ستاره ۲^h است، یعنی ۲ ساعت نجومی از عبور بالایی آن گذشته است. امّا می‌دانیم که ۲۴ ساعت نجومی (یعنی یک شبانه‌روز نجومی) برابر است با ۲۳ ساعت و ۵۶ دقیقه و ۴ ثانیه‌ی خورشیدی. بنابراین ۲ ساعت نجومی، با تعبیر روزمره‌ی ما از زمان، $۱^h۵۹^m۴۰^s$ می‌شود.

مثال ۹ ـ در مثال ۷، سمت سماک رامح با میل $۱۹^\circ۰۸'$ را در هنگام غروب از دید ناظری در خرمشهر ($\phi=۳۰^\circ۲۶'N$) محاسبه کردیم. زاویه ساعتی این ستاره در هنگام غروب چقدر است؟ مدت زمانی که بالای افق است را هم محاسبه کنید.





در شکل بالا، مثلث کروی PZX را حل می‌کنیم، تا H را به‌دست بیاوریم. مشخص است که باید رابطه‌ی کسینوس را به کار ببریم.

$$\cos ۹۰ = \cos(۹۰-\delta)\ \cos(۹۰-\phi) + \sin\ (۹۰-\delta)\ \sin(۹۰-\phi)\cos H$$
$$\Rightarrow ۰ = \sin\delta \sin\phi + \cos\delta \cos\phi \cos H$$
$$\Rightarrow \cos H = -\tan\delta \tan\phi$$

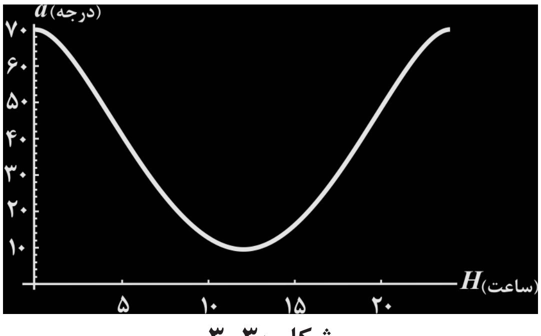
$$\left.\begin{matrix}\delta = ۱۹^\circ ۰۸' \\ \phi = ۳۰^\circ ۲۶'\end{matrix}\right\} \Rightarrow H = ۱۰۱^\circ ۴۵' = ۶^h ۴۷^m$$

بنابراین زاویه ساعتی سماک رامح در هنگام غروب، $۱۰۱^\circ ۴۵'$ است که نشان می‌دهد، کره‌ی آسمان پس از عبور بالایی سماک رامح $۱۰۱^\circ ۴۵'$ چرخیده است، با توجه به اینکه یک دور چرخش کره‌ی آسمان $۲۳^h ۵۶^m ۰۴^s$ طول می‌کشد، با یک تناسب ساده می‌توان مدت زمان بین عبور بالایی و غروب (T) را به‌دست آورد.

$$\frac{T}{۲۳^h ۵۶^m} = \frac{۱۰۱^\circ ۴۵'}{۳۶۰^\circ} \Rightarrow T = ۶^h ۴۶^m$$

مدت زمانی که این ستاره بالای افق است، دو برابر این مقدار می‌باشد، یعنی: $۱۳^h ۳۲^m$.

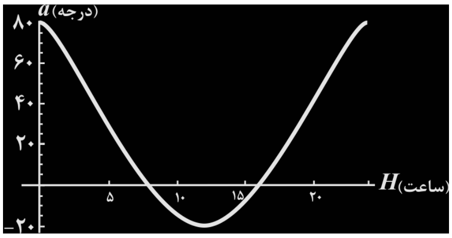
ستاره‌ای با میل ۶۰° را در شهری با عرض جغرافیایی ۴۰° در نظر بگیرید. همان‌طور که در مثال ۸ بررسی کردیم، بیش‌ترین ارتفاع این ستاره (۷۰°) هنگامی است که در حال عبور بالایی است و زاویه ساعتی آن صفر می‌باشد. پس از آن به مرور، زاویه ساعتی آن افزایش می‌یابد و در همین حال ارتفاعش کاهش می‌یابد. تا اینکه به عبور پایینی می‌رسد یعنی زاویه ساعتی‌اش ۱۲^h می‌شود. در این هنگام این ستاره کم‌ترین ارتفاع خود را خواهد داشت و پس از آن ارتفاعش افزایش می‌یابد تا دوباره به ۷۰° برسد. این موضوع را در نمودار زیر مشاهده می‌کنید. محور افقی زاویه ساعتی و محور عمودی ارتفاع است.



شکل ۳۰-۳

حالا ستاره‌ای با میل ۳۰° را در نظر بگیرید. این ستاره هم در هنگام عبور بالایی خود بیش‌ترین ارتفاعش از افق را دارد. در نمودار ۳۱-۳ ارتفاع این ستاره بر حسب زاویه ساعتی‌اش رسم شده است. مشاهده می‌کنید که وقتی زاویه ساعتی برابر صفر است، این ستاره در بیش‌ترین

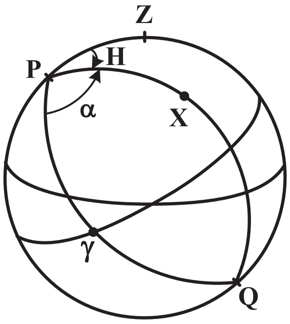
ارتفاع خود یعنی 80° قرار دارد. همین طور که زاویه ساعتی افزایش می‌یابد ارتفاع ستاره کم می‌شود تا اینکه در زاویه ساعتی حدوداً 8^h غروب می‌کند و تا هنگامی که زاویه ساعتی حدوداً 16^h شود این ستاره زیر افق است. در نمودار ۳-۳۱ ارتفاع در زیر افق منفی درنظر گرفته شده است و مشاهده می‌کنید که وقتی در حال عبور پایینی است ($H = 12^h$) کم‌ترین ارتفاع خود یعنی -20° را دارد.



شکل ۳-۳۱

زمان نجومی

در شکل ۳-۳۲ یک ستاره‌ی دلخواه را می‌بینید که با X مشخص شده است. نقطه‌ی γ هم نقطه‌ی اعتدال بهاری (مبداء سنجش بُعد) می‌باشد.



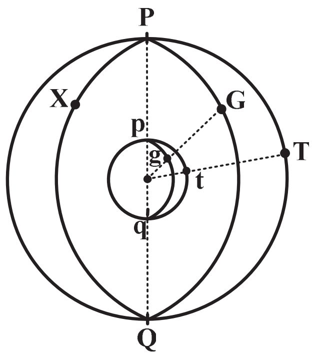
شکل ۳-۳۲

زاویه‌ی $\gamma\hat{P}X$ برابر با بُعد ستاره‌ی X و زاویه‌ی $X\hat{P}Z$ برابر با زاویه‌ی ساعتی آن است. در ضمن می‌دانیم، مجموع این دو زاویه در شکل، $\gamma\hat{P}Z$ است که نشان دهنده‌ی زاویه ساعتی اعتدال بهار است. به زاویه ساعتی اعتدال بهاری، « زمان نجومی » می‌گوییم و با ST نمایش می‌دهیم.[1]

$$ST = HA\gamma = HAX + RAX = H + \alpha \qquad \text{رابطه (۳-۱۳)}$$

HAX و RAX در واقع همان زاویه ساعتی و بُعد ستاره‌ی X است.

در شکل ۳-۳۳ نقطه‌ی C، مرکز کره‌ی زمین و کره‌ی آسمان است. طبق معمول زمین را بصورت اغراق‌آمیزی، بزرگ ترسیم کرده‌ایم. در این شکل، g گرینویچ و t یک شهر دلخواه است و G و T به ترتیب سمت‌الرأس این شهرها را نمایش می‌دهد.



شکل ۳-۳۳

1 ـ گاهی اوقات از تعبیر زمان نجومی محلی و LST نیز استفاده می‌شود ، ST ، مخفف Sidereal time و LST ، مخفف Local sidereal time است .

طول جغرافیایی شهر t را با l نمایش می‌دهیم. مشخص است که:

$$g\hat{p}t = G\hat{P}T = l$$

X یک ستاره‌ی دلخواه را بر روی کره‌ی سماوی نشان می‌دهد. منظورمان از HAX_g و HAX_t به ترتیب، زاویه ساعتی X در گرینویچ و شهر t است.

$$HAX_t = X\hat{P}T = X\hat{P}G + G\hat{P}T = HAX_g + l$$

$$\longrightarrow HAX_t = HAX_g + l \qquad \text{رابطه (۱۴- ۳)}$$

البته مشخص است که در شکل۳۳-۳، t شهری با طول جغرافیایی شرقی است. اگر طول جغرافیایی این شهر غربی باشد، رابطه‌ی (۱۴-۳) به این شکل می‌شود:

$$HAX_t = HAX_g - l$$

می‌توانیم برای سهولت کار، همواره از رابطه‌ی (۱۴- ۳) استفاده کنیم و فقط در خاطر داشته باشیم که طول‌های شرقی را در آن+ و طول‌های غربی را - قرار دهیم.

چون X را یک ستاره‌ی دلخواه بر روی آسمان در نظر گرفته‌ایم، می‌توانیم فرض کنیم که این ستاره، نقطه‌ی اعتدال بهاری باشد. در این صورت، زاویه ساعتی X در هر مکان، زمان نجومی را نمایش می‌دهد و روابطی که به‌دست آورده‌ایم به صورت زیر خواهد شد:

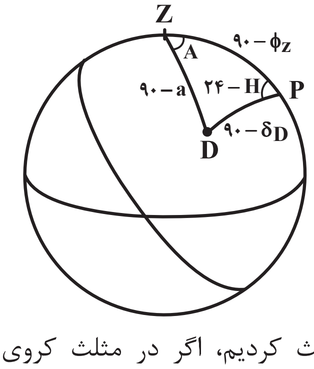
$$LST = GST + l \qquad \text{رابطه (۱۵- ۳)}$$

GST زمان نجومی در گرینویچ و LST زمان نجومی در شهری با طول جغرافیایی l است. مجدداً این نکته را یادآوری می‌کنیم که در رابطه‌ی (۱۵- ۳) هم برای طول‌های جغرافیایی غربی، علامت l، باید منفی در نظر گرفته شود.

مثال ۱۰ـ ناظری در شهر خلخال ستاره‌ی پرنوری را تقریباً در سمت الرأس خود مشاهده می‌کند، در همین لحظه شخصی در زابل، سمت و ارتفاع ستاره‌ی ذنب‌الدجاجه را به ترتیب، ′۲۹°۳۵ شرقی و ′۲۵°۷۱ ثبت می‌کند. زمان نجومی در این لحظه در خلخال و زابل چقدر است؟ ستاره‌ای که در سمت‌الرأس خلخال است، کدام ستاره است؟

خلخال $\left| \begin{array}{l} \phi_{kh} = ۳۸^\circ ۳۲' N \\ l_{kh} = ۴۸^\circ ۳۷' E \end{array} \right.$ زابل $\left| \begin{array}{l} \phi_z = ۳۱^\circ ۰۲' N \\ l_z = ۶۱^\circ ۳۰' E \end{array} \right.$ ذنب الدجاجه $\left| \begin{array}{l} \delta_D = ۴۵^\circ \\ \alpha_D = ۲۰^h\ ۴۲^m \end{array} \right.$

حل. به شکل زیر نگاه کنید. در مثلث کروی PZD ما بایدH را محاسبه کنیم. مشخص است که اگر فقط سمت را هم داشتیم، می‌توانستیم، H را به‌دست آوریم. شکل زیر ستاره‌ی ذنب‌الدجاجه را از دید ناظری که در زابل است نشان می‌دهد.



همان‌طور که در مثال۱ در این خصوص بحث کردیم، اگر در مثلث کرویPZD رابطه‌ی سینوس را برای به‌دست آوردن ($24-H$) بنویسیم نمی‌توانیم به جواب یکتایی برسیم. به همین علت از رابطه‌ی کسینوس استفاده می‌کنیم.

$$\cos(۹۰-a) = \cos(۹۰-\phi_z)\cos(۹۰-\delta_D) + \sin(۹۰-\phi_z)\sin(۹۰-\delta_D)\cos(۲۴-H)$$

$$\Rightarrow \sin a = \sin\phi_z \sin\delta_D + \cos\phi_z \cos\delta_D \cos H$$

$$\Rightarrow \cos H = \frac{\sin a - \sin\phi_z \sin\delta_D}{\cos\phi_z \cos\delta_D}$$

چون سمت ذنب‌الدجاجه از دید این ناظر شرقی است. پس H باید بین ۱۲^h تا ۲۴^h باشد.

$$\Rightarrow H = ۲۲^h ۵۹^m$$

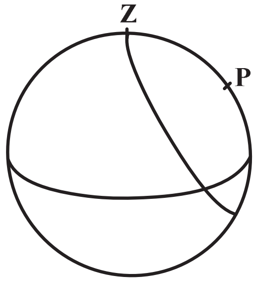
حال می‌توانیم زمان نجومی زابل (ST_z) را به‌دست آوریم.

$$ST_z = H_D + \alpha_D = ۲۲^h ۵۹^m + ۲۰^h ۴۲^m = ۴۳^h ۴۱^m$$

چون ما می‌خواهیم، زمان نجومی را بصورت عددی بین ۰^h تا ۲۴^h بیان کنیم، پس ST_z برابر است با:

$$۴۳^h ۴۱^m - ۲۴^h = ۱۹^h ۴۱^m$$

اکنون می‌خواهیم، زمان نجومی خلخال (ST_{kh}) را به‌دست بیاوریم.



$$ST_z = GST + l_z \qquad , \qquad ST_{kh} = GST + l_{kh}$$

$$\Rightarrow ST_z - ST_{kh} = l_z - l_{kh} \Rightarrow ST_{kh} = ST_z - (l_z - l_{kh})$$

$$\longrightarrow ST_{kh} = ۱۸^h ۴۹^m$$

حال می‌خواهیم بفهمیم که ستاره‌ای که در سمت‌الرأس خلخال است، چیست؟

مشخص است که چون ستاره در سمت‌الرأس قرار دارد، $\widehat{ZP}$ برابر است با $۹۰ - \delta$، از طرفی $\widehat{ZP}$ متمم عرض جغرافیایی است. پس:

$$(۹۰ - \delta) = (۹۰ - \phi_{kh}) \Rightarrow \delta = \phi_{kh} = ۳۸^\circ ۳۲'$$

در ضمن زاویه ساعتی این ستاره ۰^h است.

$$ST_{kh} = H + \alpha \Rightarrow \alpha = ۱۸^h ۴۹^m$$

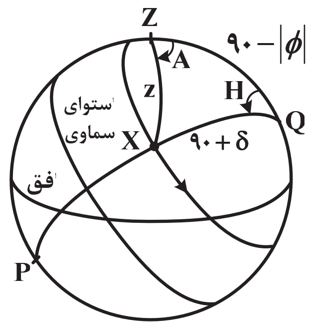
اگر به جداول نجومی نگاه کنیم، ستاره‌ی نصر واقع تقریباً این بُعد و میل را دارد. بنابراین، احتمالاً ناظری که در خلخال بوده است، نصرِ واقع را مشاهده کرده است.

نصر واقع $\left| \begin{array}{l} \delta_۷ = ۳۸^\circ ۴۸' \\ \alpha_۷ = ۱۸^h ۳۷^m \end{array} \right.$

ناظری در نیمکره‌ی جنوبی

تاکنون تمام توضیحات و مثال‌های ما برای ناظرینی بود که در نیمکره‌ی شمالی زمین قرار دارند. امّا اگر همین مسائل را در نیمکره‌ی جنوبی زمین در نظر بگیریم، تفاوت چندانی نخواهد کرد.

در نیمکره‌ی جنوبی، با استدلال‌هایی مشابه آنچه برای نیمکره‌ی شمالی گفته‌ایم، ارتفاع قطب جنوب سماوی از افق به اندازه‌ی مقدارِ عرض جغرافیایی است و ستارگان دورقطبی مجدداً قابل بررسی هستند. زاویه ساعتی همچنان زاویه‌ی بین نصف‌النهار یک ستاره و نصف‌النهار ناظر را نشان می‌دهد.

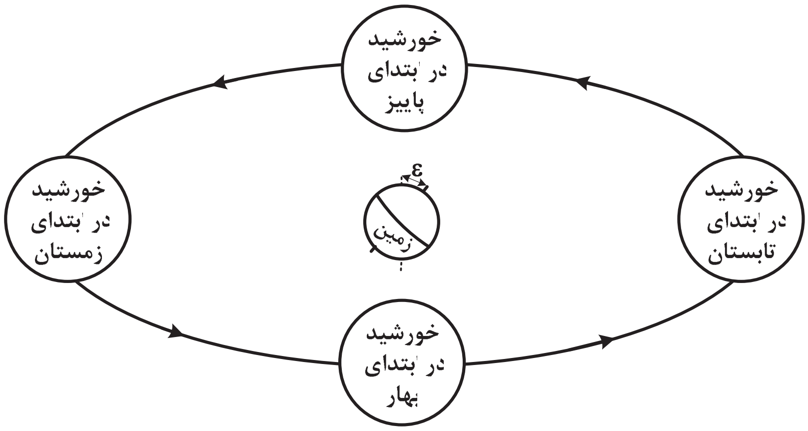


شکل ۳-۳۴

در شکل ۳-۳۴ نحوه‌ی مشخص کردن زاویه‌ی سمت‌الرأسی و سمت را هم مشاهده می‌کنید. چیزی که شاید در نگاه اول جلب توجه کند، این است که سمت را در نیمکره‌ی جنوبی از جهت جنوب می‌سنجیم.

خورشید در آسمان

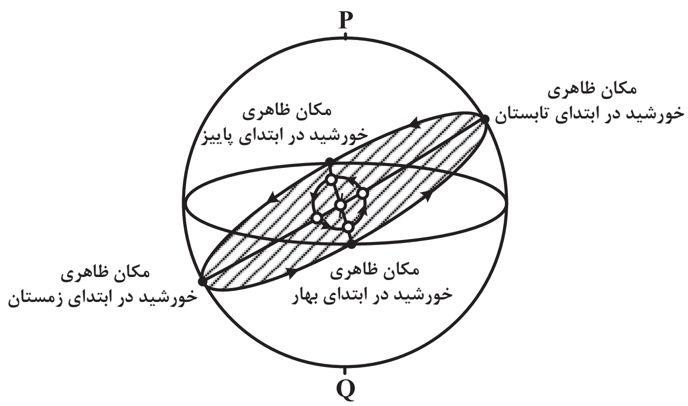
همان‌طور که پیش از این با در نظر گرفتن کره‌ی آسمان و ثابت فرض کردن زمین، در مرکز آن، نگاه ظاهری را برای حل ساده‌تر مسائل انتخاب کرده بودیم، اکنون هم فرض می‌کنیم که خورشید به دور زمین در حال چرخش است. مشخص است که بصورت ظاهری می‌توان این حرکت را به خورشید نسبت داد و مدار آن به دور زمین را بیضی‌ای با خروج از مرکز ۰/۰۱۶۷ در نظر گرفت. به علّت این که خروج از مرکز این مدار کوچک است، با تقریب خوبی حرکت خورشید به دور زمین را دایره‌ای در نظر می‌گیریم. این حرکت ظاهری را در شکل ۳-۳۵ مشاهده می‌کنید. (دقت کنید که انحراف استوای زمین نسبت به صفحه‌ی دایرةالبروج هم در این شکل لحاظ شده است).



شکل ۳-۳۵

اگر مکان ظاهری خورشید در کره‌ی سماوی همواره ثابت بود، به سادگی می‌توانستیم، با آن مانند سایر ستارگان برخورد کنیم و همان‌طور که در بخش‌های قبل طلوع و غروب ستارگان دیگر را بررسی کرده‌ایم، حرکت خورشید را هم بررسی کنیم. امّا می‌دانیم که در طول یک سال خورشید از دید ناظرین زمینی در نقاط مختلفی بر روی کره‌ی سماوی دیده می‌شود. البته این جابجایی به کندی صورت می‌گیرد و می‌توانیم، فرض کنیم که در طول یکی، دو روز، جای آن در کره‌ی سماوی ثابت است، امّا فعلاً هدف ما بررسی کلی حرکت خورشید در کره‌ی آسمان است.

در شکل ۳-۳۶ مدار ظاهری خورشید به دور زمین را در مرکز کره‌ی سماوی مشاهده می‌کنید. اگر در هر لحظه، خطی از زمین به خورشید متصل کنیم و امتداد دهیم، در نقطه‌ای کره‌ی آسمان را قطع می‌کند در واقع مجموعه‌ی این نقاط دایره عظیمه‌ای را بر روی کره‌ی سماوی تشکیل می‌دهد که محل تلاقی کره‌ی آسمان و صفحه‌ی دایرةالبروج است.



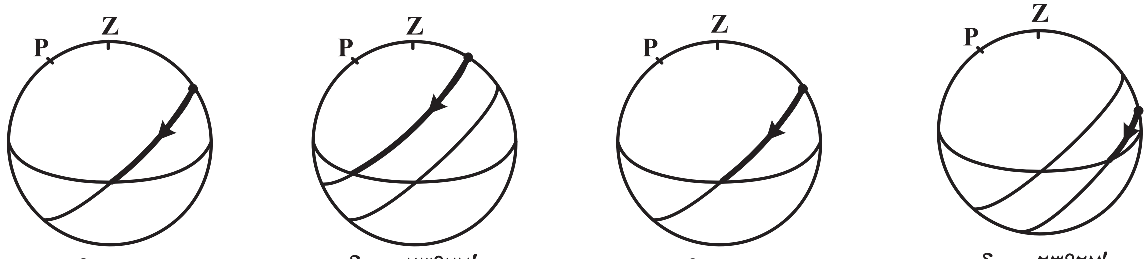
شکل ۳-۳۶

نام دایرةالبروج از همین جا گرفته شده است. زیرا دایره عظیمه‌ای که در شکل بالا مشاهده می‌کنید و نشان‌دهنده‌ی مکان ظاهری خورشید در زمان‌های مختلف است، از میان برج‌های دوازده‌گانه‌ای عبور می‌کند که از هزاران سال پیش، هر ماه با یکی از آن‌ها شناخته می‌شده است.

به نقطه‌ای که در شروع فصل بهار خورشید در آن دیده می‌شود، نقطه‌ی « اعتدال بهاری » می‌گوییم و با γ نمایش می‌دهیم. از دید ناظرین زمینی، در این هنگام میل خورشید صفر است و به مرور افزایش می‌یابد تا اینکه در شروع فصل تابستان، میل خورشید $+۲۳^\circ ۲۷'$ می‌شود، در این هنگام خورشید در نقطه‌ی « انقلاب زمستانی » قرار می‌گیرد و پس از آن میل خورشید به مرور کاهش می‌یابد تا اینکه در شروع فصل پاییز صفر می‌شود، به این نقطه هم « اعتدال پاییزی » می‌گوییم. در ادامه میل خورشید منفی می‌شود و در نهایت به $-۲۳^\circ ۲۷'$ می‌رسد. در این حالت خورشید در « انقلاب زمستانی » قرار دارد.

با توجه به اینکه هر سال ۳۶۵ روز است، تقریباً در هر روز خورشید ۱° بر روی کره‌ی سماوی به شرق می‌رود. بنابراین دیگر مانند ستارگان ثابت، یک دور چرخش ظاهری آن $۲۳^h ۵۶^m$ طول نمی‌کشد، بلکه حدوداً ۴^m بیش‌تر لازم است تا آن ۱ درجه هم جبران شود. بنابراین، شبانه‌روز خورشیدی ۲۴^h است.

شکل‌های زیر مسیر ظاهری خورشید را در ۴ زمان خاص از دید ناظری در یک عرض جغرافیایی شمالی نشان می‌دهد.



شکل ۳۷-۳

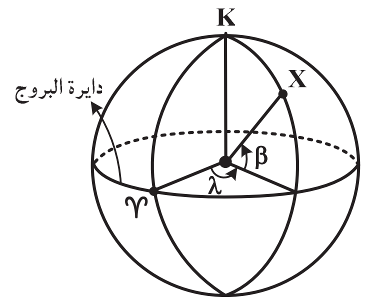
همان‌طور که در شکل ۳۷-۳ مشاهده می‌کنید، در اعتدالین (یعنی اعتدال بهاری و پاییزی) دقیقاً در نیمی از شبانه‌روز خورشید بالای افق است. یعنی ۱۲ ساعت شب و ۱۲ ساعت روز. امّا در انقلاب تابستانی یعنی ابتدای تابستان، طول روز به بیش‌ترین مقدار خود می‌رسد و در هنگام ظهر، خورشید در ارتفاع بالاتری قرار می‌گیرد. به همین علت در نیمکره‌ی شمالی زمین این زمان نشان‌دهنده‌ی گرمای بیش‌تر هوا است. عکس این حالت را در انقلاب زمستانی یعنی آغاز زمستان که به شب یلدا معروف است، شاهد هستیم. در این زمان طول روز به کم‌ترین مقدار رسیده است و خورشید حتی در هنگام ظهر هم ارتفاع زیادی ندارد.

امّا اگر شکل ۳۷-۳ را برای نیمکره‌ی جنوبی زمین ترسیم کنیم، نتایج وارونه‌ای را شاهد خواهیم بود، یعنی در انقلاب تابستانی مدت روز کاهش و در انقلاب زمستانی مدت روز افزایش می‌یابد.

دستگاه مختصات دایرةالبروجی

با استفاده از دایرةالبروج می‌توانیم، دستگاه مختصات تازه‌ای را تعریف کنیم که برای بررسی حرکت خورشید و سیارات مناسب‌تر است. قطب دایرةالبروج را با K نمایش می‌دهیم. طبق همان رسمی که تا کنون داشته‌ایم و بُعد و میل، طول و عرض جغرافیایی و سمت و ارتفاع را تعریف کرده‌ایم، می‌خواهیم دستگاه مختصات دایرةالبروجی را بیان کنیم. فاصله‌ای که هر ستاره با دایرةالبروج می‌سازد را « عرض سماوی » یا «عرض دایرةالبروجی» می‌نامیم و با β نمایش می‌دهیم. در ضمن نصف‌النهارهایی از قطب شمال دایرةالبروج به قطب جنوب آن متصل می‌کنیم و زاویه‌ی بین نصف‌النهار هر ستاره و نصف‌النهار اعتدال بهاری را « طول سماوی» یا « طول دایرةالبروجی» می‌نامیم و با λ نمایش می‌دهیم.

در شکل ۳۸-۳، طول و عرض سماوی را برای یک ستاره‌ی دلخواه مشاهده می‌کنید.



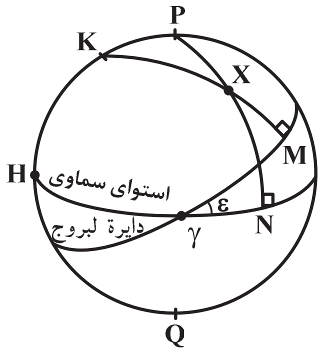
شکل ۳۸- ۳

عرض سماوی می‌تواند مثبت یا منفی باشد و طول سماوی همان‌طور که در شکل ۳۸-۳ می‌بینید از سمت شرق اعتدال بهاری سنجیده می‌شود و مقداری از صفر تا ۳۶۰° می‌تواند داشته باشد.

خورشید از دید ما همواره بر روی دایرةالبروج قرار دارد، بنابراین عرض سماوی‌اش صفر است. در ضمن می‌دانیم که مدار تمام سیارات انحراف کمی نسبت به دایرةالبروج دارند، بنابراین همواره دارای عرض سماوی کمی خواهند بود. مثلاً زاویه‌ی انحراف مدار ماه نسبت به دایرةالبروج $۵^\circ ۰۹'$ است. بنابراین عرض سماوی ماه بین $+۵^\circ ۰۹'$ و $-۵^\circ ۰۹'$ تغییر می‌کند.

نکته‌ای که پرداختن به آن در این مرحله مفید است، نحوه‌ی تبدیل مختصات دایرةالبروجی و استوایی به یک‌دیگر است.

در شکل ۳۹-۳، X نشان‌گر مکان یک ستاره‌ی دلخواه بر روی کره‌ی سماوی است. P و K به ترتیب قطب شمال مختصات استوایی و دایرةالبروجی هستند. زاویه‌ی بین استوای سماوی و دایرةالبروج با ε نمایش داده شده است. $\widehat{XM}$ عرض سماوی ستاره‌ی X و $\widehat{\gamma M}$ طول سماوی آن است، در ضمن بُعد و میل این ستاره هم به ترتیب $\widehat{\gamma N}$ و $\widehat{XN}$ می‌باشد. هدف ما این است که با داشتن بعضی از این زوایا، سایر آن‌ها را به‌دست بیاوریم. مثلاً با داشتن بُعد و میل یک ستاره، عرض سماوی آن را محاسبه کنیم.

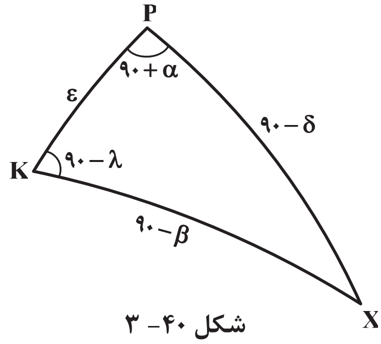


شکل ۳۹- ۳

در شکل مشخص است که:

$$H\hat{K}X = ۹۰+\widehat{\gamma M} = ۹۰+\lambda \Rightarrow P\hat{K}X = ۱۸۰-H\hat{K}X = ۹۰-\lambda$$
$$H\hat{P}X = ۹۰+\widehat{\gamma N} = ۹۰+\alpha$$
$$\widehat{KX} = ۹۰-\widehat{XM} = ۹۰-\beta$$
$$\widehat{PX} = ۹۰-\widehat{XN} = ۹۰-\delta$$

در ضمن $\widehat{KP}$ هم به اندازه‌ی ε یعنی $۲۳^\circ ۲۷'$ است. پس در مثلث کروی KPX ما می‌توانیم با نوشتن رابطه‌های مختلف، این زوایا را بر حسب یکدیگر به‌دست آوریم.



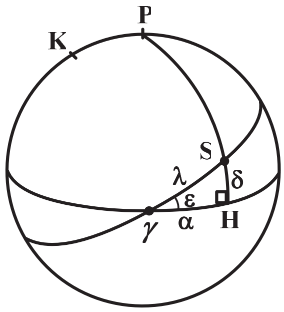
شکل ۴۰- ۳

مثلاً اگر با داشتن بُعد و میل، بخواهیم عرض سماوی را به‌دست بیاوریم، می‌توانیم رابطه‌ی کسینوس را به صورت زیر بنویسیم:

$$\cos(۹۰-\beta)=\cos\varepsilon\cos(۹۰-\delta)+\sin\varepsilon\sin(۹۰-\delta)\cos(۹۰+\alpha)$$

$$\Rightarrow \sin\beta=\cos\varepsilon\sin\delta-\sin\varepsilon\cos\delta\sin\alpha$$

پیش از این گفته بودیم، که خورشید در ابتدای فصل بهار در نقطه‌ی اعتدال بهاری است و بُعد و میل آن صفر است و سپس به مرور بر روی دایرةالبروج شروع به حرکت می‌کند و بُعد و میل آن تغییر می‌کند. اکنون می‌خواهیم به این موضوع به صورت کمّی نگاه کنیم و در هر روز از سال، بُعد و میل خورشید را محاسبه کنیم. می‌توان سرعت زاویه‌ای حرکت خورشید بر روی دایرةالبروج را ثابت فرض کرد. این موضوع با فرض دایره‌ای بودن مدار هم ارز است. با این حساب، طول سماوی خورشید با آهنگ ثابتی افزایش می‌یابد و با یک تناسب ساده می‌توان آن را برای هر روز به‌دست آورد. شکل ۴۱-۳ خورشید را در یک روز دلخواه بر روی دایرةالبروج نشان می‌دهد. S نشان‌دهنده‌ی خورشید است.

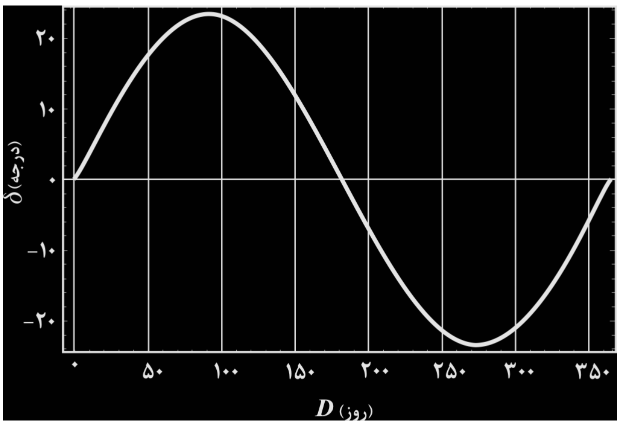


شکل ۴۱- ۳

در مثلث کروی γSH، λ، δ و α مشخص شده‌اند با نوشتن رابطه‌ی سینوس، داریم:

$$\frac{\sin\lambda}{\sin ۹۰}=\frac{\sin\delta}{\sin\varepsilon}\Rightarrow \sin\delta=\sin\varepsilon\sin\lambda \qquad \text{رابطه (۱۶- ۳)}$$

که بوسیله‌ی رابطه‌ی ۱۶-۳ می‌توانیم در هر روز از سال، با داشتن λ، δ را به‌دست آوریم. در نمودار زیر میل خورشید را در هر روز از سال مشاهده می‌کنید. محور عمودی این نمودار، δ (میل خورشید) و محور افقی D (تعداد روزی که از ابتدای سال گذشته است) می‌باشد. در رسم این نمودار فرض شده است که λ با آهنگ ثابتی افزایش می‌یابد.



شکل ۴۲- ۳

حال یک بار دیگر به شکل۴۱-۳ توجه کنید. اگر در مثلث γSH، رابطه‌ی چهارجزئی را بنویسیم، می‌توانیم رابطه‌ای برای محاسبه‌ی α به‌دست بیاوریم:

$$\cos\alpha\cos\varepsilon=\sin\alpha\cot\lambda-\sin\varepsilon\cot ۹۰$$

$$\Rightarrow \quad \tan\alpha=\cos\varepsilon\tan\lambda \qquad \text{رابطه (۱۷-۳)}$$

مثال ۱۱ـ مدت روز (یعنی زمانی که خورشید بالای افق است) در روز اول خرداد ماه برای ناظری در شهر ملبورن استرالیا چقدر است؟ اگر این ناظر در شهر کاشان زندگی می‌کرد، طول روزش در اول خرداد چقدر بود؟

ملبورن $\phi_M = ۳۷^\circ ۴۹' S$ ، $l_M = ۱۴۴^\circ ۵۸' E$

کاشان $\phi_k = ۳۳^\circ ۵۹' N$ ، $l_k = ۵۱^\circ ۲۷' E$

حل. برای اینکه طول روز را محاسبه کنیم، نیازمند این هستیم که میل خورشید را بدانیم. بنابراین ابتدا طول سماوی خورشید را به‌دست می‌آوریم تا با آن میل را محاسبه کنیم. در روز اول خرداد ماه ۶۲ روز از ابتدای بهار گذشته است. با توجه به اینکه پس از ۳۶۵ روز، طول سماوی خورشید ۳۶۰° می‌شود:

$$\frac{\lambda}{۳۶۰} = \frac{۶۲}{۳۶۵} \Rightarrow \lambda = ۶۱^\circ / ۱۵$$

البته همان‌طور که پیش از این گفته‌ایم، این محاسبه تقریبی است. شاید بهتر باشد به جای اینکه سرعت زاویه‌ای خورشید را در تمام سال ثابت بگیریم، این فرض را در فصل بهار انجام دهیم، تا بتوانیم λ را دقیق‌تر به‌دست آوریم. بنابراین از این موضوع بهره می‌گیریم که ۹۳ روز پس از ابتدای بهار طول سماوی خورشید، ۹۰° می‌شود:

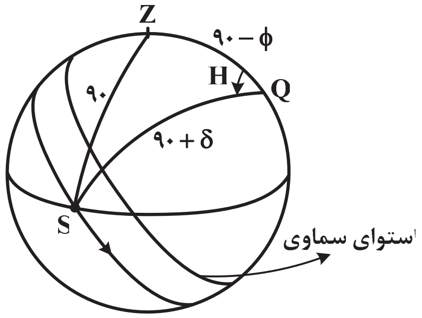
$$\frac{\lambda}{۹۰} = \frac{۶۲}{۹۳} \Rightarrow \lambda = ۶۰^\circ$$

مقدار ۶۰° دقیق‌تر است و ما از این مقدار استفاده خواهیم کرد.

حال اگر در مثلث کروی γSH از شکل ۴۱-۳، رابطه‌ی سینوس را بنویسیم، خواهیم داشت:

$$\frac{\sin\lambda}{\sin ۹۰} = \frac{\sin\delta}{\sin\varepsilon} \Rightarrow \sin\delta = \sin\varepsilon \sin\lambda$$

$$\lambda = ۶۰^\circ \Rightarrow \quad \delta = ۲۰^\circ / ۲$$



حال با دانستن میل خورشید، می‌توانیم، طول روز را در شهر ملبورن محاسبه کنیم. برای این‌کار باز هم از زاویه ساعتی در هنگام غروب، استفاده می‌کنیم.

در شکل مقابل S خورشید است و مسیر حرکت آن را در آسمان ملبورن مشاهده می‌کنید. اجزای مثلث کروی SZQ را در شکل مشخص کرده‌ایم، رابطه‌ی کسینوس را در این مثلث کروی می‌نویسیم:

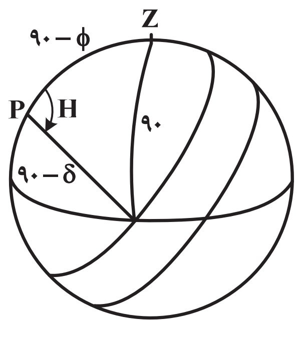
$$\cos ۹۰ = \cos(۹۰-\phi)\cos(۹۰+\delta) + \sin(۹۰-\phi)\sin(۹۰+\delta)\cos H$$

$$\Rightarrow ۰ = -\sin\phi\sin\delta + \cos\phi\cos\delta\cos H \Rightarrow \cos H = \tan\phi\tan\delta$$

$$\left.\begin{array}{l}\delta = ۲۰^\circ / ۲ \\ \phi = ۳۷^\circ ۴۹'\end{array}\right\} \Rightarrow H = ۷۳^\circ / ۴ = ۴^h ۵۴^m$$

بنابراین مدّت روز برابر است با $۹^h ۴۶^m$.

امّا در شهر کاشان:



$$\cos ۹۰ = \cos(۹۰-\phi)\cos(۹۰-\delta) + \sin(۹۰-\phi)\sin(۹۰-\delta)\cos H$$

$$\Rightarrow ۰ = \sin\phi\sin\delta + \cos\phi\cos\delta\cos H$$

$$\Rightarrow \cos H = -\tan\phi\tan\delta$$

$$\left.\begin{array}{l}\delta = ۲۰^\circ / ۲ \\ \phi = ۳۳^\circ ۵۹'\end{array}\right\} \Rightarrow H = ۱۰۴^\circ / ۴ = ۶^h ۵۷^m$$

بنابراین مدت روز برابر است با $۱۳^h ۵۴^m$.

زمان خورشیدی

تأثیر عمیقی که طلوع و غروب خورشید در زندگی روزمره‌ی ما دارد، باعث می‌شود که ما زمان روزانه‌ی خود را با توجه به خورشید تعریف کنیم. شبانه‌روز خورشیدی مدت زمان بین دو عبور پیاپی خورشید از نصف‌النهار ناظر است. اگر این مدّت زمان را در روزهای مختلف اندازه‌گیری کنیم، متوجه می‌شود که همواره مقدار ثابتی نیست، بلکه نوسان‌های کوچکی حولِ ۲۴^h دارد. علت تفاوت روز خورشیدی بیش از هر چیز دیگر دو عامل است:

۱ ـ انحراف استوای زمین نسبت به دایرةالبروج

۲ ـ بیضوی بودن مدار

دو عامل بالا باعث می‌شوند که بُعد خورشید در طول سال با آهنگ ثابتی افزایش نیابد و در نتیجه شبانه‌روز خورشیدی ثابت نباشد. برای حل این مشکل جسم فرضی‌ای تعریف می‌کنیم و آن را خورشید میانگین[1] می‌نامیم. خورشید میانگین بر روی استوای سماوی حرکت می‌کند. و بُعد آن با آهنگ ثابتی افزایش می‌یابد. حالا اگر شبانه‌روز خورشیدی را زمان بین دو عبور پیاپی خورشید میانگین در نظر بگیریم، همواره دقیقاً ۲۴^h خواهد بود.

اختلاف زاویه ساعتی واقعی و خورشید میانگین را تعدیل زمان[2] می‌نامیم.

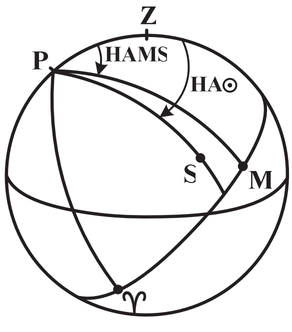
$$E = HA\odot - HAMS \qquad \text{رابطه (۱۸- ۳)}$$

در رابطه‌ی بالا E نشان‌دهنده‌ی تعدیل زمان، $HA\odot$ زاویه ساعتی خورشید واقعی و $HAMS$ زاویه ساعتی خورشید میانگین است.
به همین شکل می‌توانیم تعدیل زمان را اختلاف بعد خورشید میانگین ($RAMS$) و بُعد خورشید واقعی ($RA\odot$) در نظر بگیریم.

$$ST = HA\odot + RA\odot = HAMS + RAMS$$

$$\Rightarrow HA\odot - HAMS = RAMS - RA\odot = E \qquad \text{رابطه (۱۹- ۳)}$$

در شکل ۴۳-۳ S خورشید واقعی و M خورشید میانگین است.



شکل ۴۳-۳

زاویه‌ی $M\hat{P}Z$، زاویه ساعتی خورشید میانگین و زاویه‌ی $S\hat{P}Z$، زاویه ساعتی خورشید واقعی است. بنابراین $M\hat{P}S$، تعدیل زمان را نشان می‌دهد. در نگاهی دیگر هم مشخص است که $M\hat{P}S$ یعنی تعدیل زمان، اختلاف بُعد خورشید میانگین ($\gamma\hat{P}M$) و بُعد خورشید واقعی ($\gamma\hat{P}S$) است.

زمان محلی را با MT نشان می‌دهیم و به گونه‌ی زیر تعریف می‌کنیم:

$$MT = HAMS + ۱۲^h \qquad \text{رابطه (۲۰- ۳)}$$

افزودن ۱۲^h به‌خاطر این است که نیمه شب، شروع روز باشد. با این حساب وقتی خورشید در حال عبور بالایی است، MT، ۱۲^h می‌شود.
زمان محلی در گرینویچ را با GMT نمایش می‌دهیم. GMT می‌تواند یک زمان بین‌المللی و مشترک میان تمام نقاط زمین باشد. از این رو به آن زمان جهانی هم می‌گوییم و با UT آن را مشخص می‌کنیم.[3]

---

1 - Mean Sun
2 - Equation of time
3 ـ UT مخفف Universal Time (زمان جهانی) می‌باشد .

همان‌طور که پیش از این در خصوص ارتباط میان زمان نجومی در نقاط مختلف صحبت کرده بودیم، اکنون می‌توانیم بگوییم.

$MT = UT + l$ رابطه (۲۱- ۳)

که در رابطه‌ی بالا l نشان‌دهنده‌ی طول جغرافیایی مکانی است که زمان محلی آن را با MT نمایش می‌دهیم. در ضمن اینجا هم l را شرقی در نظر گرفته‌ایم و باید بدانیم که اگر l غربی باشد، رابطه‌ی اخیر به شکل زیر در می‌آید:

$MT = UT - l$

از آنجایی که در یک منطقه‌ی وسیع جغرافیایی نیاز به یک زمان واحد است، در سطح یک کشور، نصف‌النهاری را به عنوان نصف‌النهار مبداء زمان منطقه‌ای انتخاب می‌کنیم و در تمام نقاط آن کشور ساعت‌ها را بر حسب همان زمان تنظیم می‌کنیم. نصف‌النهار مبداء زمان منطقه‌ای در ایران، نصف‌النهار $۵۲^\circ/۵$ است، که برابر با $۳^h/۵$ می‌باشد.

زمان منطقه‌ای را با ZT نمایش می‌دهیم.[1]

$ZT = UT + l_\circ$ رابطه (۲۲- ۳)

در رابطه‌ی بالا $l_\circ$، طول جغرافیایی نصف‌النهار مبداء یک منطقه است. مجدداً باید به یاد داشته باشید که اگر $l_\circ$ غربی باشد، علامت پشت آن منفی (ـ) خواهد بود.

مثال ۱۲ـ اذان ظهر به افق شهر ملایر در روز ۱۸ تیر ۱۳۸۸، ۱۳:۲۰ می‌باشد. با توجه به اینکه طول جغرافیایی ملایر $۴۸^\circ۴۹'$ است، تعدیل زمان در این روز چقدر است؟

حل. اذان ظهر دقیقاً لحظه‌ای است که خورشید واقعی از نصف‌النهار ناظر عبور می‌کند. بنابراین زاویه ساعتی خورشید واقعی در ملایر ($HA\odot_M$) ، صفر است. برای محاسبه‌ی تعدیل زمان باید بدانیم، که زاویه ساعتی خورشید میانگین در این لحظه در ملایر ($HAMS_M$) چقدر است.

چون در نیمه‌ی اول سال، ساعت‌ها یک ساعت به جلو کشیده می‌شوند، در واقع زمان منطقه‌ای (ZT) در هنگام اذان ظهر ملایر، $۱۲^h۲۰^m$ است. یعنی زاویه ساعتی خورشید میانگین در طول جغرافیایی $۵۲^\circ/۵$ (طول جغرافیایی مبداء زمان در ایران) ۲۰^m است.

طول جغرافیایی ملایر را با l_M و طول جغرافیایی مبداء زمان در ایران را با $l_\circ$ نمایش می‌دهیم. در ضمن منظورمان از MT و UT هم به ترتیب زمان محلی ملایر و زمان جهانی است:

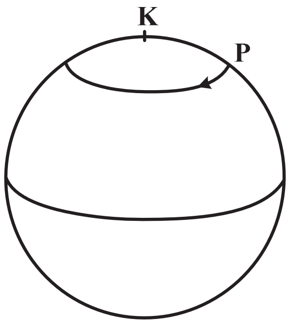
$$ZT = UT + l_\circ$$
$$MT = UT + l_M$$
$$\Rightarrow ZT - MT = l_\circ - l_M \Rightarrow MT = ZT - (l_\circ - l_M) = ۱۲^h ۰۵^m$$

پس $HAMS_M$، ۵^m است.

$$E = HA\odot_M - HAMS_M = ۰ - ۵^m = -۵^m$$

حرکت تقدیمی

محور دوران زمین همواره جهت ثابتی را در آسمان نشان نمی‌دهد، بلکه تقریباً دایره صغیره‌ای را به دور قطب شمال دایرةالبروج در مدت ۲۵۸۰۰ سال می‌پیماید. جهت این حرکت را در شکل ۴۴-۳ مشاهده می‌کنید.

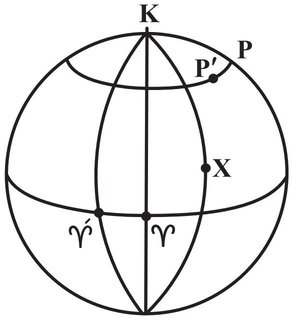


شکل ۴۴- ۳

به خاطر این حرکت، نقطه‌ی اعتدال بهاری هم ثابت نمی‌ماند، زیرا اعتدال بهاری محل تقاطع دایرةالبروج و استوای سماوی است. پس با توجه به تغییر مکان نقطه‌ی اعتدال بهاری، مقدار بُعد و میل ستارگان و همچنین طول سماوی آن‌ها تغییر می‌کند. با توجه به اینکه تعریف

1 ـ ZT مخفف Zone Time (زمان منطقه‌ای) می‌باشد.

عرض سماوی ارتباطی با نقطه‌ی اعتدال بهاری ندارد، پس از گذشت مدت طولانی به خاطر حرکت تقدیمی تغییر نمی‌کند. اگر فرض کنیم که حرکت تقدیمی با آهنگ ثابتی انجام شود، پس اعتدال بهاری هم بر روی دایرةالبروج با آهنگ ثابتی به سمت غرب می‌رود. در حدود ۲۰۰۰ سال پیش نقطه‌ی اعتدال بهاری در صورت فلکیِ حمل قرار داشته است امّا اکنون در صورت فلکی حوت قرار دارد. با توجه به اینکه طول سماوی ستارگان را از اعتدال بهاری به سمت شرق می‌سنجیم، بنابراین به علت حرکت تقدیمی، طول سماوی ستارگان با آهنگ ثابتی افزایش می‌یابد. فرض کنید، طول سماوی ستاره‌ی X، λ باشد و پس از گذشت زمان t سال، طول سماوی آن λ' خواهد بود، در این مدت اعتدال بهاری از γ به γ' می‌رود. به شکل ۴۵-۳ توجه کنید.



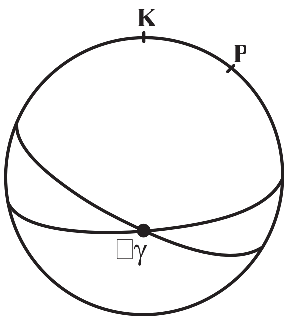
شکل ۴۵-۳

$$\lambda = \gamma\hat{K}X \quad , \quad \lambda' = \gamma'\hat{K}X = \gamma'\hat{K}X + \gamma\hat{K}X$$
$$\Rightarrow \lambda' = \widehat{\gamma'\gamma} + \lambda$$

بنابراین، طول سماوی ستاره‌ی X به اندازه‌ی $\widehat{\gamma'\gamma}$ افزایش یافته است.

$$\frac{\gamma'\gamma}{۳۶۰} = \frac{T}{۲۵۸۰۰} \Rightarrow \gamma'\gamma = \frac{۳۶۰}{۲۵۸۰۰}t$$
$$\Rightarrow \lambda' = \frac{۳۶۰}{۲۵۸۰۰}t + \lambda \qquad \text{رابطه (۲۳- ۳)}$$

که در رابطه‌ی بالا t بر حسب سال است.

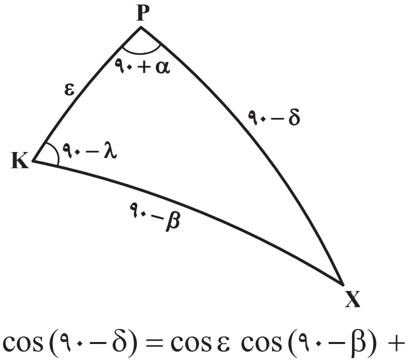


مثال ۱۳ـ ۶۰۰۰ سال بعد، قطب شمال کنونی آسمان، چه بُعد و میلی خواهد داشت؟

می‌دانیم که قطب شمال آسمان $۲۳°۲۷'$ از قطب شمال دایرةالبروج فاصله دارد. بنابراین عرض سماوی آن $۶۶°۳۳'$ است. در شکل روبه‌رو مشخص است که طول سماوی شمال کنونی $۹۰°$ است.

حل. با توجه به رابطه‌ی (۲۳- ۳) می‌توانیم، طول سماوی قطب شمال کنونی را برای ۶۰۰۰ سال بعد به‌دست آوریم.

$$\lambda' = \frac{۳۶۰}{۲۵۸۰۰} \times ۶۰۰۰ + ۹۰ = ۱۷۳° / ۷$$



بنابراین ما می‌دانیم که در آن زمان، قطب شمال کنونی، نقطه‌ای با طول و عرض سماوی، $۱۷۳° / ۷$ و $۶۶° / ۵$ خواهد بود، حالا تنها کافی است که این مختصات را به مختصات استوایی تبدیل کنیم. همان‌طور که پیش از این توضیح داده بودیم، می‌توانیم از مثلث کروی KPX در شکل ۴۰-۳ استفاده کنیم.

ابتدا رابطه‌ی کسینوس را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos(۹۰-\delta) = \cos\varepsilon \cos(۹۰-\beta) + \sin\varepsilon \sin(۹۰-\beta)\cos(۹۰-\lambda)$$
$$\Rightarrow \sin\delta = \cos\varepsilon \sin\beta + \sin\varepsilon \cos\beta \sin\lambda \Rightarrow \delta = ۵۹° / ۲$$

یک بار هم از رابطه‌ی چهارجزئی استفاده می‌کنیم.

$$\cos\varepsilon\cos(90-\lambda)=\sin\varepsilon\cot(90-\beta)-\sin(90-\lambda)\cot(90+\alpha)$$

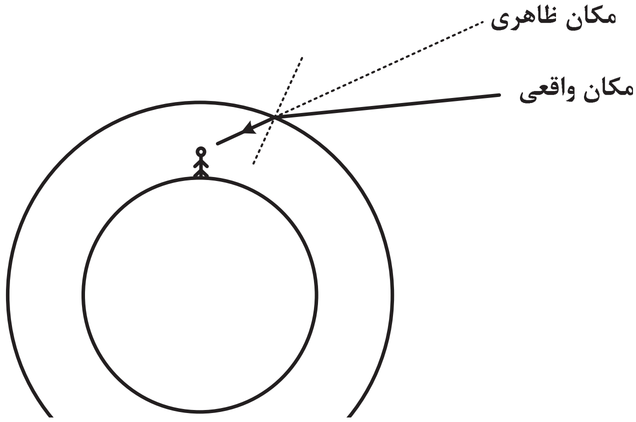
$$\Rightarrow\cos\varepsilon\sin\lambda=\sin\varepsilon\tan\beta+\cos\lambda\tan\alpha$$

$$\Rightarrow\tan\alpha=\frac{\cos\varepsilon\sin\lambda-\sin\varepsilon\tan\beta}{\cos\lambda}\Rightarrow\alpha=219/4$$

البته در رابطه‌ی بالا، چون α را از روی $\tan\alpha$ محاسبه کرده‌ایم. ی۱ک جواب $39/4^\circ$ هم وجود دارد که بدیهی است، جواب ما نمی‌تواند باشد.

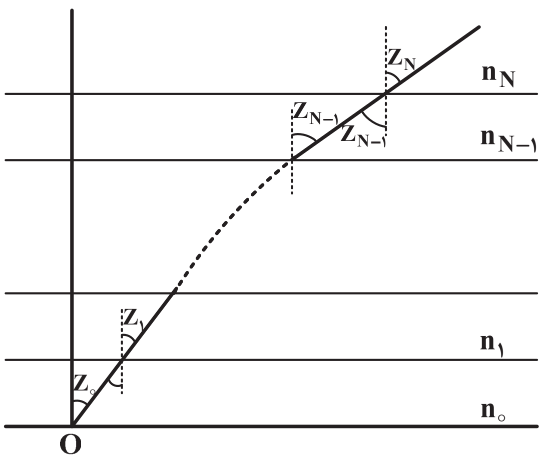
شکست

به علت وجود جو زمین، ما ستارگان را در مکان واقعی‌شان مشاهده نمی‌کنیم، بلکه هر ستاره‌ای در ظاهر کمی بالاتر از مکان واقعی‌اش دیده می‌شود.



شکل ۴۶- ۳

برای ستارگانی که زاویه‌ی سمت‌الرأسی کوچکی دارند، می‌توانیم با یک مدل‌سازی، مقدار تغییر مکان ظاهری ستاره‌ها در آسمان را محاسبه کنیم. به شکل ۴۷-۳ توجه کنید. چون زاویه‌ی سمت‌الرأسی را کوچک در نظر گرفته‌ایم، می‌توانیم از کروی بودن سطح زمین صرف‌نظر کنیم و زمین و جو را به‌صورت مسطح در نظر بگیریم.



شکل ۴۷- ۳

در شکل ۴۷-۳، لایه‌های مختلف جو را با ضریب شکست‌های مختلف نشان داده‌ایم. ضریب شکست در لایه‌ی i اُم را با n_i، و زاویه‌ی سمت‌الرأسی در این لایه را با z_i نمایش می‌دهیم. به ترتیب می‌توانیم بنویسیم:

$$n_N \sin z_N = n_{N-1} \sin z_{N-1}$$
$$n_{N-1} \sin z_{N-1} = n_{N-2} \sin z_{N-2}$$
$$\vdots$$
$$n_1 \sin z_1 = n_0 \sin z_0$$

با ساده کردن روابط بالا به این نتیجه می‌رسیم که:

$$n_N \sin z_N = n_0 \sin z_0$$

با توجه به اینکه n_N ضریب شکست در بالاترین لایه است، آن را برابر ۱ در نظر می‌گیریم در ضمن z_N همان زاویه‌ی سمت‌الرأسی واقعی ستاره است که آن را، با z نمایش می‌دهیم. z_0 یعنی زاویه‌ی سمت‌الرأسی ظاهری را هم با z' مشخص می‌کنیم.

$$n_0 \, Sin\, z' = Sin\, z$$

زاویه‌ی شکست (R) را اختلاف زاویه‌ی الرأسی واقعی و ظاهری تعریف می‌کنیم.

$$R = z - z' \Rightarrow z = z' + R$$
$$\Rightarrow n_0 Sin\, z' = Sin\,(z' + R) = Sin\, z'\, Cos\, R + Cos\, z'\, Sin\, R$$
$$\Rightarrow n_0 = Cos\, R + Cot\, z' Sin\, R$$

با توجه به این‌که R زاویه‌ی کوچکی است، می‌توانیم بنویسیم $Cos\, R = 1$ و $Sin\, R = R$

$$\Rightarrow n_0 = 1 + R\, Cot\, z' \Rightarrow R = (n_0 - 1) \tan z'$$

n_0 تقریباً ۱/۰۰۰۲۹ است. پس رابطه‌ی اخیر به شکل زیر در می‌آید:

$$R = 0/00029 \tan z'$$

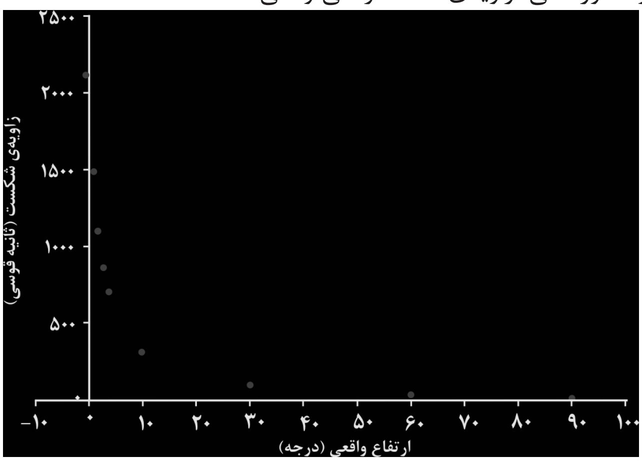
که در رابطه‌ی بالا R بر حسب رادیان به‌دست می‌آید. می‌توانیم ۰/۰۰۰۲۹ را در $\frac{360}{\pi}$ ضرب کنیم تا مقدار آن را بر حسب درجه بیابیم که تقریباً یک دقیقه‌ی قوسی می‌شود.

رصدهای دقیق‌تر نشان می‌دهند که این ضریب ثابت، که به « ضریب شکست » معروف است، در حدود $58''/2$ می‌باشد. پس می‌توان گفت:

$$R = 58''/2 \tan z' \qquad \text{رابطه (۲۴-۳)}$$

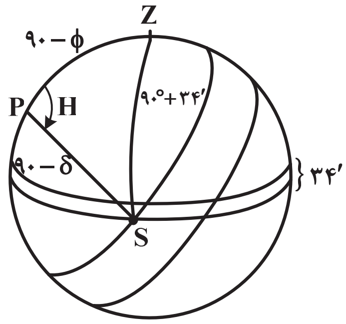
که در رابطه‌ی بالا R بر حسب ثانیه‌ی قوسی به‌دست می‌آید.

البته همان‌طور که گفتیم، این رابطه تقریبی است و حدوداً برای زوایای سمت‌الرأسی کوچک‌تر از 45° جواب می‌دهد. امّا با داده‌های رصدی می‌توان مقدار زاویه‌ی شکست را برای فواصل سمت‌الرأسی مختلف به‌دست آورد. به نمودار ۴۸-۳ نگاه کنید. در این نمودار، محور عمودی زاویه‌ی شکست (R) و محور افقی، زاویه‌ی سمت‌الرأسی واقعی است.



شکل ۴۸-۳

وقتی که ستاره‌ای را بر روی افق مشاهده می‌کنیم، در واقع این ستاره ′۳۴ زیر افق است. به این مقدار (′۳۴) ، « شکست افقی» می‌گوییم.



مثال ۱۴ـ در مثال ۱۱، مدت روز را در اول خرداد ماه، برای ناظری در شهر کاشان $۱۳^h۵۴^m$ محاسبه کردیم با در نظر گرفتن شکست افقی، مدت روز چه‌قدر می‌شود؟

حل. در مثلث، PZS رابطه‌ی کسینوس را می‌نویسیم:

$$\cos(۹۰^\circ + ۳۴') = \cos(۹۰ - \delta)\cos(۹۰ - \phi) + \sin(۹۰ - \delta)\sin(۹۰ - \phi)\cos H$$

$$\Rightarrow -\sin(۳۴') = \sin\delta\sin\phi + \cos\delta\cos\phi\cos H$$

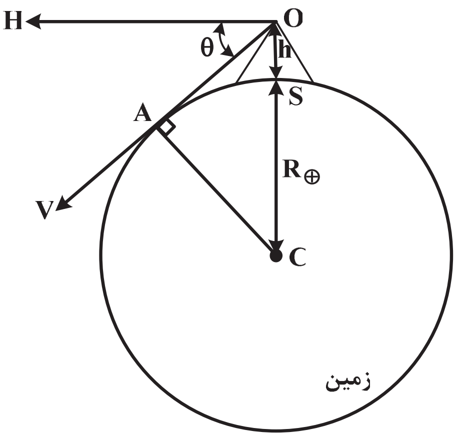
$$\Rightarrow \cos H = \frac{-\sin(۳۴') - \sin\delta\sin\phi}{\cos\delta\cos\phi}$$

$$\left.\begin{array}{l}\delta = ۲۰^\circ/۲ \\ \phi = ۳۳^\circ۵۹'\end{array}\right\} \Rightarrow H = ۱۰۵^\circ/۱ = ۷^h\,۰۰^m$$

بنابراین مدت روز ۱۴^h می‌شود. یعنی ۶^m بیش‌تر از مقداری که بدون در نظر گرفتن شکست به‌دست آوردیم.

افت افق

در قسمت قبل دیدیم که شکست افقی باعث می‌شود که ناظر مقداری از زیر افق را مشاهده کند. یا به عبارت دیگر ناظر، نقطه‌ای را بر روی افق می‌بیند که در واقع زیر افق است. چیز دیگری که باعث این موضوع می‌شود، « افت افق » است. به شکل ۴۹-۳ توجه کنید.



شکل ۴۹-۳

ناظر در نقطه‌ی O که از سطح زمین ارتفاع h دارد، قرار گرفته است. H به طرفی است که زاویه‌ی سمت‌الرأسی ۹۰° است. ناظر افق را امتداد V در نظر می‌گیرد. یعنی از دید این ناظر افق به اندازه‌ی θ افت کرده است. زاویه‌ی $H\hat{O}C = ۹۰^\circ$، بنابراین $A\hat{O}C$، متمم θ است و در نتیجه $A\hat{C}O$ برابر با θ می‌باشد.

$$\cos A\hat{C}O = \cos\theta = \frac{AC}{OC} \quad , \quad AC = R_\oplus \quad , \quad OC = h + R_\oplus$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{R_\oplus}{R_\oplus + h} \qquad \text{رابطه (۲۵-۳)}$$

در ضمن در شکل ۴۹- ۳ مشخص است که ناظر به اندازه‌ی طول کمان $\widehat{AS}$ از پای کوه تا آخرین نقطه‌ای که از سطح زمین می‌بیند، فاصله دارد.

$$\widehat{AS}\ \text{طول کمان} = R_\oplus\theta \qquad \text{رابطه (۲۶-۳)}$$

به پرسش‌های زیر فکر کنید

۱ ــ آیا می‌توان گفت که هر سه نقطه بر روی کره، قطعاً در یک نیم‌کره قرار دارند؟

۲ ــ n دایره عظیمه بر روی کره در نظر بگیرید، به طوری که دو به دو، بیش از دو نقطه‌ی مشترک نداشته باشند، و هیچ نقطه‌ای محل تلاقی بیش از دو دایره عظیمه نباشد. تعداد نقاط تقاطع چند تا خواهد بود؟ تعداد مثلث‌های کروی چندتا خواهد بود؟

۳ ــ یک مثلث کروی را در نظر بگیرید. با بزرگ کردن زوایای این مثلث مجموع زوایا به چه مقداری میل می‌کند؟

۴ ــ آیا ممکن است، سه جزء از یک مثلث کروی را داشته باشیم، امّا نتوانیم اجزای دیگر آن را به صورت یکتا مشخص کنیم؟

۵ ــ چرا نوشتن رابطه‌ی چهارجزئی و سینوس در مثلث قطبی، به یافتن رابطه‌ی تازه‌ای نمی‌انجامد؟

۶ ــ آیا نقطه‌ی اعتدال بهاری، همه جا، با یک زمان نجومی طلوع می‌کند؟

۷ ــ گفته می‌شود که نوک سایه‌ی یک شاخص، بر روی زمین، یک مقطع مخروطی به وجود می‌آورد. در ضمن می‌دانیم که مقاطع مخروطی حاصل تقاطع یک مخروط و یک صفحه هستند. آیا می‌توانید بین این دو موضوع ارتباطی برقرار کنید؟

۸ ــ اگر در مثال ۱۰، سمت ذنب‌الدجاجه (*Deneb*) از دید ناظر زابلی داده نمی‌شد، آیا باز هم می‌توانستیم، ST را به صورت یکتا مشخص کنیم؟

۹ ــ می‌دانیم که خورشید در انقلاب تابستانی، یعنی ابتدای تابستان، در هنگام ظهر بیش‌ترین ارتفاع از افق را دارد و در ضمن، در این هنگام مدت روز بیش‌ترین مقدار است. بنابراین انتظار می‌رود که این زمان اوج گرما باشد، در حالی که اکثریت مردم، اواسط تابستان را گرم‌تر می‌دانند علّت این تناقض چیست؟

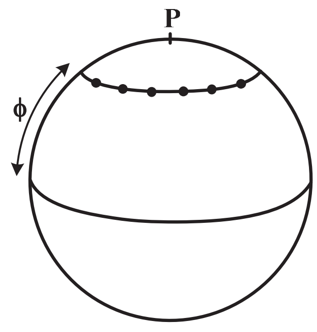
۱۰ ــ میل ستاره‌ی سهیل، $-52^\circ/7$ است. فکر می‌کنید که چرا در ادبیات عامیانه‌ی ما ستاره‌ی سهیل، نماد افراد کم پیدا است؟

مسائل

۱ ــ یک مثلث کروی متساوی الاضلاع در نظر بگیرید که اضلاعش a و زوایایش θ باشد. ثابت کنید که:

$$\lim_{a\to 0} \theta = \frac{\pi}{3}$$

۲ ــ دو شهر $A\left|\begin{matrix}\phi_A\\ l_A\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}\phi_B\\ l_B\end{matrix}\right.$ را بر روی زمین در نظر بگیرید. ناظر A، شهر B را با سمت غربی α و ناظر B، شهر A را با سمت شرقی β مشاهده می‌کند. ثابت کنید وقتی این دو شهر به هم نزدیک شوند، $\alpha+\beta$ به π میل می‌کند.



۳ ــ مانند شکل مقابل، دایره صغیره‌ای به اندازه‌ی زاویه‌ی ϕ بالاتر از یک دایره عظیمه رسم کرده‌ایم. به سطحی که با این دایره صغیره تشکیل می‌شود، عرق‌چین می‌گوییم. بر روی دایره صغیره، n نقطه مشخص می‌کنیم به طوری که هر نقطه، با دو نقطه‌ی کنار خود زاویه‌ی برابری داشته باشد. نقطه‌های مجاور را با دایره‌های عظیمه‌ایی به هم متصل می‌کنیم. در ضمن از P هم به هر یک از این نقاط دایره عظیمه‌ای وصل می‌کنیم. بنابراین n تا مثلث کروی درون عرق‌چین تشکیل می‌شود.

الف) ثابت کنید که مجموع مساحت مثلث‌ها برابر است با:

$$S = ۲\pi R^۲ + ۲nR^۲ \tan^{-1}\left(\frac{\sin\frac{۲\pi}{n}}{\sin\phi(۱-\cos\frac{۲\pi}{n})}\right) - n\pi R^۲$$

ب) ثابت کنید، وقتی که n به بی‌نهایت میل می‌کند:

$$S = ۲\pi R^۲(۱-\sin\phi)$$

۴ ـ بدون در نظر گرفتن شکست و افت افق، مدت روز را در یکی از اعتدالین، برای ناظری در عرض جغرافیایی ϕ به‌دست آورید. آیا این مدت به ϕ وابسته است؟

۵ ـ در چه محدوده‌ای از عرض جغرافیایی، خورشید می‌تواند، دور قطبی شود؟

۶ ـ در چه محدوده‌ای از عرض جغرافیایی، خورشید می‌تواند، از سمت‌الرأس عبور کند؟

۷ ـ رابطه‌هایی، مشابه رابطه‌ی (۱۱-۳) و (۱۲-۳) برای ناظر نیمکره‌ی جنوبی بیابید.

۸ ـ بیش‌ترین ارتفاع سیاره‌ی زهره، از دید ناظری در شهری با عرض جغرافیایی ϕ چقدر است؟ (مدار زهره را بر روی دایرةالبروج در نظر بگیرید. فرض کنید تنها زمانی که خورشید زیر افق باشد، زهره دیده شود).

۹ ـ فرض کنید، در تمام نواحی کمربند سیارک‌ها، سیارک وجود داشته باشد. در ضمن این کمربند را دقیقاً بر روی دایرةالبروج در نظر بگیرید. از دید ناظری در عرض جغرافیایی ϕ (شمالی و میانی) در زمان نجومی ST، کمترین سمت شرقی‌ای که یک سیارک می‌تواند، داشته باشد (A_{min}) چقدر است؟

۱۰ ـ فرض کنید، ناظری در شهر همدان با عرض جغرافیایی $۳۴^\circ ۴۸'$، سمت و ارتفاع مریخ و زهره را بصورت زیر ثبت کرده باشد:

	سمت	ارتفاع
زهره	۹۵° شرقی	۱۲°
مریخ	$۱۲۷^\circ / ۷$ غربی	$۱۵^\circ / ۲$

زمان نجومی (ST) در لحظه‌ای که ناظر، زهره و مریخ را مشاهده کرده است، چقدر است؟

۱۱ ـ بُعد و میلِ قطب شمال کهکشان راه شیری عبارت است از: $۱۲^h ۵۲^m$ و $۲۷^\circ ۴' / ۵$. در چه زمان نجومی‌ای مسیر کهکشان به افق ناظری در عرض ۳۵° شمالی، عمود می‌شود؟

۱۲ ـ اگر اختلاف ضریب شکست در ناحیه‌ی مرئی امواج الکترومغناطیس، Δn باشد، طول رنگین کمانی که از ستاره‌ای با زاویه‌ی سمت‌الرأسی واقعی z تشکیل می‌شود، چقدر است؟ (z از ۴۵° کمتر است)

۱۳ ـ شخصی می‌خواهد برای مدت یک سال به گونه‌ای بر روی سطح زمین حرکت کند که همواره خورشید در سمت‌الرأس او باشد.

الف) بیش‌ترین و کم‌ترین سرعتی که او نیاز دارد، چقدر است؟

ب) پس از یک سال، از چند نقطه‌ی سطح زمین دو بار عبور می‌کند.

۱۴ ـ ۱۵۰۰۰ سال بعد، (بیش‌ترین ارتفاع) ستاره‌ی قطبی کنونی در تهران (ϕ=۳۵° /۵) چقدر خواهد بود؟

۱۵ ـ ناظری در شهری با عرض جغرافیایی $۵^\circ S$ زندگی می‌کند.

الف) او برای دیدن ستاره‌ی قطبی حداقل چه مسافتی را باید بر روی زمین طی کند.

ب) اگر این ناظر، بخواهد در جایش باقی بماند. برای دیدن ستاره‌ی قطبی کنونی، چند سال باید صبر کند؟

۱۶ ـ کم‌ترین فاصله‌ی دو برج به ارتفاع $۴۳۵m$ (برابر با برج میلاد) از هم چقدر باشد، تا ناظرینی که بر فراز آن‌ها ایستاده‌اند، قادر به دیدن هم نباشند؟